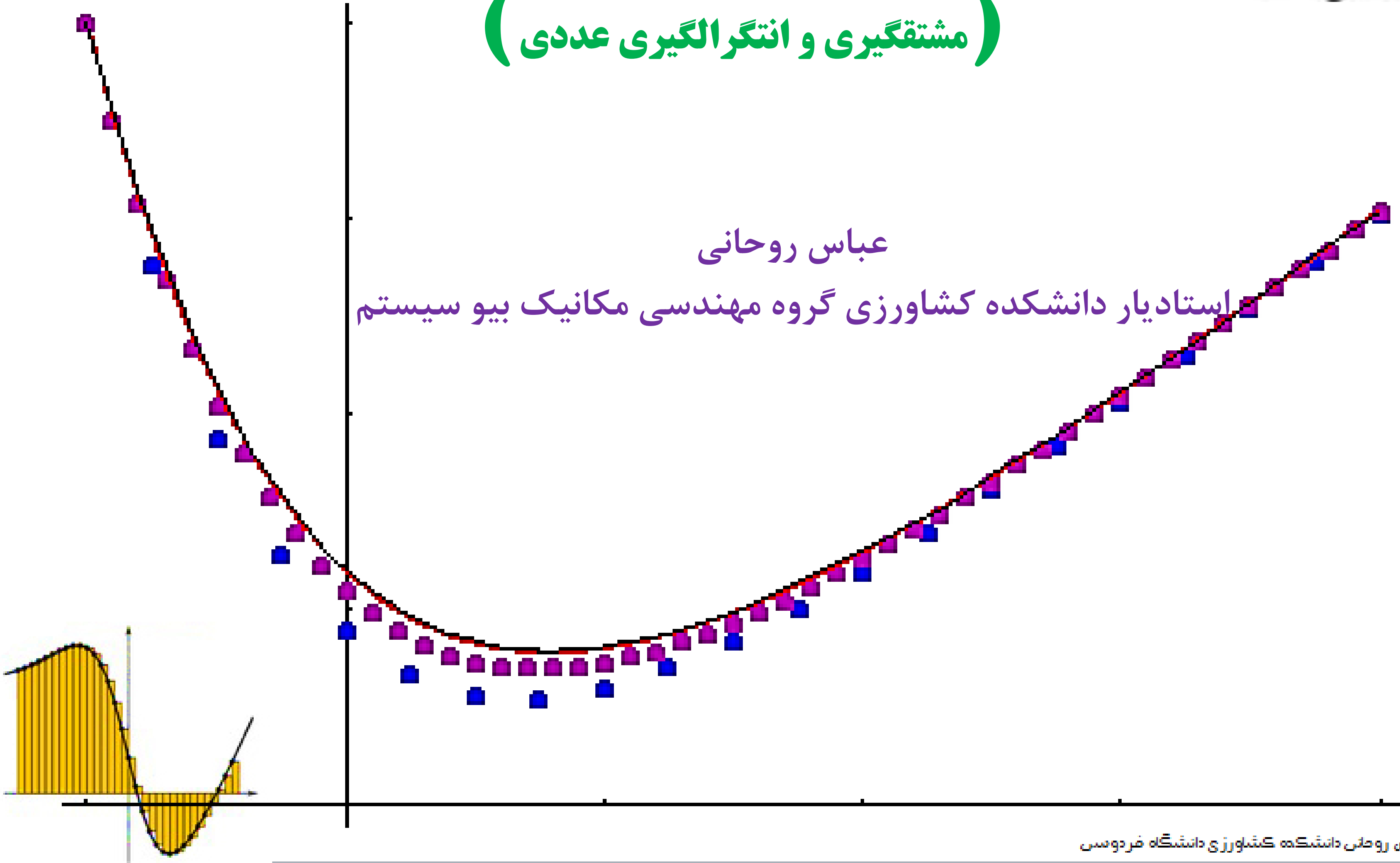
محاسبات عددی

(مشتقگیری و انتگرالگیری عددی)



عباس روحانی

استادیار دانشکده کشاورزی گروه مهندسی مکانیک بیو سیستم

هرگاه $P(x)$ چند جمله ای درونیاب f باشد، در اینصورت مشتقهای $f'(x), f''(x),\ldots$ را به کمک $P'(x), P''(x),\ldots$ به دست می آوریم.

خطای حاصل از مشتق گیری یعنی $f'(x)-P'(x),\ldots$ خیلی بزرگ می باشد.

دستورهای مشتق گیری بر اساس چند جمله ای درونیاب

هرگاه تابع f در نقاط متساوی الفاصله x_j ،$j=0, 1, \ldots, n$ داده شده باشد، در اینصورت چندجمله ای درونیاب f در نقاط $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}$ به کمک دستور تفاضل پیشرو نیوتن قابل محاسبه است.

$$P(x) = f_i + s\Delta f_i + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_i + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_i + \cdots + \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-k+1)}{k!}\Delta^k f_i$$

$x=x_i+sh, \quad i=0, 1, \ldots, n-1$

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \cong \frac{dP(x)}{dx} = \frac{dP(x)}{ds} \cdot \frac{ds}{dx}$$

$$x = x_i + sh \quad \rightarrow \quad dx = hds \quad \rightarrow \quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{h}$$

$$\boxed{P(x) = f_i + s\Delta f_i + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_i + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_i + \cdots \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-k+1)}{k!}\Delta^k f_i}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) \cong \frac{1}{h}\left[\Delta f_i + \left(s - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 f_i + \frac{3s^2 - 6s + 2}{6}\Delta^3 f_i + \cdots\right]$$

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \cong \frac{d^2 P(x)}{dx^2} \cong \frac{1}{h^2}\frac{d^2 P(x)}{ds^2} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f_i + (s-1)\Delta^3 f_i + \cdots\right]$$

هرگاه s=0 باشد آنگاه برای مشتقات f در نقاط جدولی x_i داریم: $x=x_i+sh,\ \ i=0, 1, \dots, n-1$

$$f'(x) \cong \frac{1}{h}\left[\Delta f_i + \left(s-\frac{1}{2}\right)\Delta^2 f_i + \frac{3s^2-6s+2}{6}\Delta^3 f_i + \cdots\right]$$

s=0

$$f'(x_i) = f'_i \cong \frac{1}{h}\left[\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i + \frac{1}{3}\Delta^3 f_i - \cdots\right]$$

$$f'_i \cong \frac{1}{h}\Delta f_i = \frac{f_{i+1}-f_i}{h}$$

یا

$$f'_i \cong \frac{1}{h}\left[\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i\right] = \frac{2f_{i+1} - \frac{1}{2}f_{i+2} - \frac{3}{2}f_i}{h}$$

هرگاه **s=0** باشد آنگاه برای مشتقات مرتبه دوم **f** در نقاط جدولی x_i داریم:

$$\boxed{f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f_i + (s-1)\Delta^3 f_i + \cdots\right]}$$

$$\Big\Downarrow {\scriptstyle s=0}$$

$$f''(x_i) = f_i'' \cong \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f_i - \Delta^3 f_i + \frac{11}{12}\Delta^4 f_i - \cdots\right]$$

$$\Big\Downarrow$$

$$f_i'' \cong \frac{1}{h^2}\Delta^2 f_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2}$$

هرگاه $s=\frac{1}{2}$ باشد آنگاه برای مشتقات f در نقاط میانی جدولی x_i داریم:

$$\boxed{f'(x) \cong \frac{1}{h}\left[\Delta f_i + \left(s-\frac{1}{2}\right)\Delta^2 f_i + \frac{3s^2-6s+2}{6}\Delta^3 f_i + \cdots\right]}$$

$$\Big\Downarrow\ s=\frac{1}{2}$$

$$f'\left(x_i+\frac{h}{2}\right) = f'_{i+\frac{1}{2}} \cong \frac{1}{h}\left[\Delta f_i - \frac{1}{24}\Delta^3 f_i + \frac{1}{48}\Delta^4 f_i - \cdots\right]$$

$$\Big\Downarrow$$

$$f'\left(x_i+\frac{h}{2}\right) \cong \frac{1}{h}\Delta f_i = \frac{f_{i+1}-f_i}{h}$$

هرگاه s=1 باشد آنگاه

$$\boxed{f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f_i + (s-1)\Delta^3 f_i + \cdots\right]}$$

$$\Big\Downarrow\ s=1$$

$$f''(x_i + h) = f''_{i+1} \cong \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f_i - \frac{1}{12}\Delta^4 f_i + \cdots\right]$$

$$\Big\Downarrow$$

$$f''_{i+1} \cong \frac{1}{h^2}\Delta^2 f_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2}$$

مقدار f'_i را برای i=0, 1, 2, 3 برای تابع جدولی زیر بدست آورید؟.

x_i	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
f_i	1.10517	1.16183	1.22140	1.28403	1.34986

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$
0.1	1.10517		
		0.05666	
0.15	1.16183		0.00291
		0.05957	
0.2	1.22140		0.00306
		0.06263	
0.25	1.28403		0.00320
		0.06583	
0.3	1.34986		

x_i	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
f_i	1.10517	1.16183	1.22140	1.28403	1.34986

$h = 0.05$

i	$f'_i \cong \frac{1}{h}\Delta f_i$
0	1.1332
1	1.1914
2	1.2526
3	1.3166

i	$f'_i \cong \frac{1}{h}\left[\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i\right]$
0	1.104
1	1.1608
2	1.2206

توجه: مقادیر f_i در این مثال مربوط به تابع $f(x)=e^x$ می باشد که مشتق آن با خودش برابر است!.

دستورهای مشتق گیری با استفاده از بسط تیلور

فرض کنید $x_{i+1}=x_i+h$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \cdots$$

$$\boxed{f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}}$$

برای محاسبه $f'(x_0)$ از این رابطه استفاده می کنیم

هرگاه $x_{i-1}=x_i - h$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \cdots$$

$$\boxed{f'(x_i) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h}}$$

برای محاسبه $f'(x_n)$ از این رابطه استفاده می کنیم

$$f(x_{i-1}) = f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \cdots$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \cdots$$

هر گاه دو رابطه بالا را جمله به جمله از یکدیگر کم و جملات اضافی را حذف کنیم، داریم:

$$\boxed{f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}}$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \cdots$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \cdots$$

هر گاه دو رابطه بالا را جمله به جمله با یکدیگر جمع و جملات اضافی را حذف کنیم، داریم:

$$\boxed{f''(x_i) \cong \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})}{h^2} = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}}$$

به همین ترتیب داریم:

$$\boxed{f'''(x_i) \cong \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3}}$$

مقدار f'_0 ، f'_2 ، f''_2 را برای تابع جدولی زیر بدست آورید؟.

x_i	0	1	2	3
f_i	0	0.375	0.971	1.511

h=1

$$f'_0 = f'(x_0) \cong \frac{f_1 - f_0}{h} = \frac{0.375 - 0}{1} = 0.375$$

$$f'_2 = f'(x_2) \cong \frac{f_3 - f_2}{h} = \frac{1.511 - 0.971}{1} = 0.540$$

$$f''_2 = f''(x_2) \cong \frac{f_1 - 2f_2 + f_3}{h^2} = \frac{0.375 - 1.942 + 1.511}{1} = -0.056$$

خطای مشتق گیری عددی

از بسط تیلور استفاده می کنیم: $x_{i+1} = x_i + \mathrm{h}$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \cdots$$

$$f_{i+1} = f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2!}f''_i + \frac{h^3}{3!}f'''_i + \cdots$$

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h} = f'_i + \frac{h^1}{2!}f''_i + \frac{h^2}{3!}f'''_i + \cdots$$

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h} - f'_i = \frac{h^1}{2!}f''_i + \frac{h^2}{3!}f'''_i + \cdots$$

$$\boxed{\frac{f_{i+1}-f_i}{h}-f'_i=\frac{h^1}{2!}f''_i+\frac{h^2}{3!}f'''_i+\cdots}$$

مقدار $\frac{h^1}{2!}f''_i+\frac{h^2}{3!}f'''_i+\cdots$ خطای $\frac{f_{i+1}-f_i}{h}$ به عنوان تقریبی از f'_i

$$\boxed{\frac{f_{i+1}-f_i}{h}-f'_i\cong\frac{h}{2!}f''_i}$$

چون توان h یک است، اصطلاحا می گوییم خطا متناسب با h است و می نویسیم:

$$\boxed{\frac{f_{i+1}-f_i}{h}-f'_i=O(h)}$$

بسط $f'\left(x_i+\frac{h}{2}\right)$ عبارت است از:

$$f'\left(x_i+\frac{h}{2}\right)=f_i'+\frac{h}{2}f_i''+\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2!}f_i'''+\cdots$$

حال اگر رابطه بالا را از رابطه پایین کم کنیم، :

$$\frac{f_{i+1}-f_i}{h}=f_i'+\frac{h^1}{2!}f_i''+\frac{h^2}{3!}f_i'''+\cdots$$

داریم

$$f'\left(x_i+\frac{h}{2}\right)-\frac{f_{i+1}-f_i}{h}=\frac{h^2}{8}f_i'''-\frac{h^2}{6}f_i'''+\cdots=-\frac{h^2}{24}f_i'''$$

بنابراین:

$$f'\left(x_i+\frac{h}{2}\right)-\frac{f_{i+1}-f_i}{h}=O(h^2)$$

نکته:

می دانیم $\frac{f_{i+1}-f_i}{h}$ هم به عنوان تقریبی از $f'(x_i)$ و $f'\left(x_i+\frac{h}{2}\right)$ استفاده می شود.

این عبارت تقریب بهتری برای $f'\left(x_i+\frac{h}{2}\right)$ می باشد

زیرا هر چه توان h در عبارت خطا بیشتر باشد، خطا کمتر است.

$$\boxed{f'\left(x_i+\frac{h}{2}\right)-\frac{f_{i+1}-f_i}{h}=-\frac{h^2}{24}f_i'''=O(h^2)}$$

$$\boxed{\frac{f_{i+1}-f_i}{h}-f_i'\cong\frac{h}{2!}f_i''=O(h)}$$

با کوچکتر شدن h خطا کمتر می شود.

ناپایداری مشتق گیری عددی

در حالت کلی خطای فرمولهای مشتق گیری عددی به صورت $O(h^p)$ است.

P بستگی به تعداد جملاتی دارد که برای تقریب مشتق مورد نظر استفاده می شود.

ظاهرا هر چه P بزرگتر باشد، خطا نیز کمتر خواهد شد.

به عنوان مثال کسر مقابل را به عنوان تقریب f'_i در نظر بگیرید:

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

کوچک بودن h به معنی نزدیک بودن f_i و f_{i+1} است، بنابراین $f_{i+1} - f_i$ می تواند توام با خطای زیادی باشد.

چون $f_{i+1} - f_i$ در مقدار بزرگ $\frac{1}{h}$ ضرب می شود، خطا محاسبه کسر زیاد خواهد شد.

برای کم بودن خطا از طرفی h باید کوچک اختیار شود و از طرف دیگر نباید خیلی کوچک اختیار شود.
لذا برای انتخاب بهترین h در عمل امکانپذیر نیست!.

مطالعه آزاد

Differentiation –Discrete Functions

http://numericalmethods.eng.usf.edu

Forward Difference Approximation

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

For a finite $'\Delta x'$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Graphical Representation Of Forward Difference Approximation

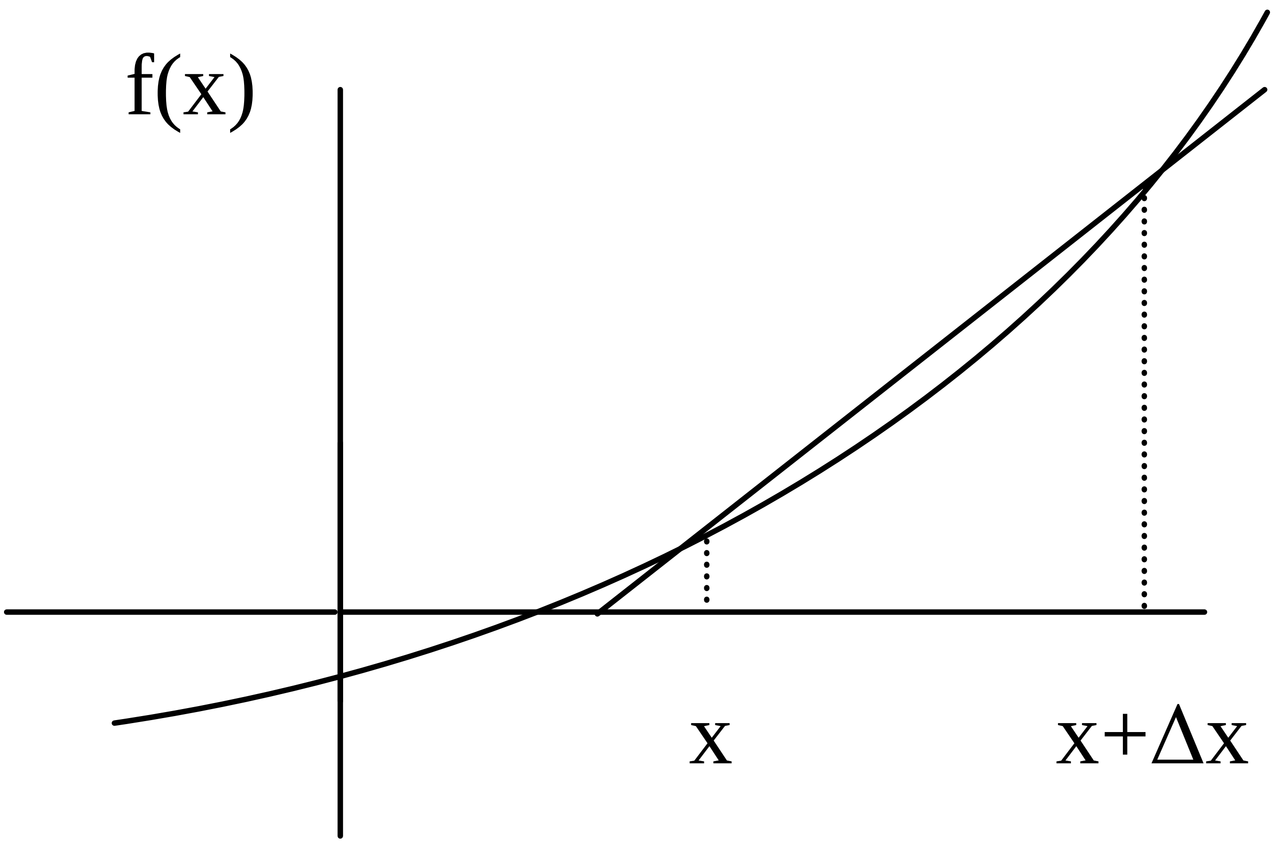


Figure 1 Graphical Representation of forward difference approximation of first derivative.

Example 1 The upward velocity of a rocket is given as a function of time in Table 1.

Table 1 Velocity as a function of time

t s	v(t) m/s
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67

Using forward divided difference, find the acceleration of the rocket at $t = 16$ s.

Solution

To find the acceleration at **t=16s**, we need to choose the two values closest to **t=16s**, that also bracket **t=16s** to evaluate it. The two points are **t=15s** and **t=20s**.

$$a(t_i) \approx \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{\Delta t}$$

t(s)	v(t)(m/s)
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67

$t_i = 15$ $\quad$ $t_{i+1} = 20$

$$\begin{aligned}\Delta t &= t_{i+1} - t_i \\ &= 20 - 15 \\ &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(16) &\approx \frac{v(20) - v(15)}{5} \\ &\approx \frac{517.35 - 362.78}{5} \\ &\approx 30.914 \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

Direct Fit Polynomials

In this method, given $'n+1'$ data points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$

one can fit a n^{th} order polynomial given by

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots\ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

To find the first derivative,

$$P_n'(x) = \frac{dP_n(x)}{dx} = a_1 + 2a_2 x + \ldots\ldots + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + n a_n x^{n-1}$$

Similarly other derivatives can be found.

Example 2-Direct Fit Polynomials

The upward velocity of a rocket is given as a function of time in Table 2.

Table 2 Velocity as a function of time

t(s)	v(t)(m/s)
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67

Using the third order polynomial interpolant for velocity, find the acceleration of the rocket at t=16s.

Solution

For the third order polynomial (also called cubic interpolation), we choose the velocity given by

$$v(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

Since we want to find the velocity at t=16s , and we are using third order polynomial, we need to choose the four points closest to t=16s and that also bracket t=16s to evaluate it.

The four points are $t_o = 10, t_1 = 15,\ t_2 = 20,$ and $t_3 = 22.5.$

$$t_o = 10,\ v(t_o) = 227.04$$

$$t_1 = 15,\ v(t_1) = 362.78$$

$$t_2 = 20,\ v(t_2) = 517.35$$

$$t_3 = 22.5,\ v(t_3) = 602.97$$

t(s)	v(t)(m/s)
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67

such that

$$v(10)=227.04=a_0+a_1(10)+a_2(10)^2+a_3(10)^3$$

$$v(15)=362.78=a_0+a_1(15)+a_2(15)^2+a_3(15)^3$$

$$v(20)=517.35=a_0+a_1(20)+a_2(20)^2+a_3(20)^3$$

$$v(22.5)=602.97=a_0+a_1(22.5)+a_2(22.5)^2+a_3(22.5)^3$$

Writing the four equations in matrix form, we have

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 \\ 1 & 15 & 225 & 3375 \\ 1 & 20 & 400 & 8000 \\ 1 & 22.5 & 506.25 & 11391 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 227.04 \\ 362.78 \\ 517.35 \\ 602.97 \end{bmatrix}$$

Solving the above four equations gives

$$a_0 = -4.3810$$

$$a_1 = 21.289$$

$$a_2 = 0.13065$$

$$a_3 = 0.0054606$$

Hence $$v(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$= -4.3810 + 21.289t + 0.13065t^2 + 0.0054606t^3, \quad 10 \le t \le 22.5$$

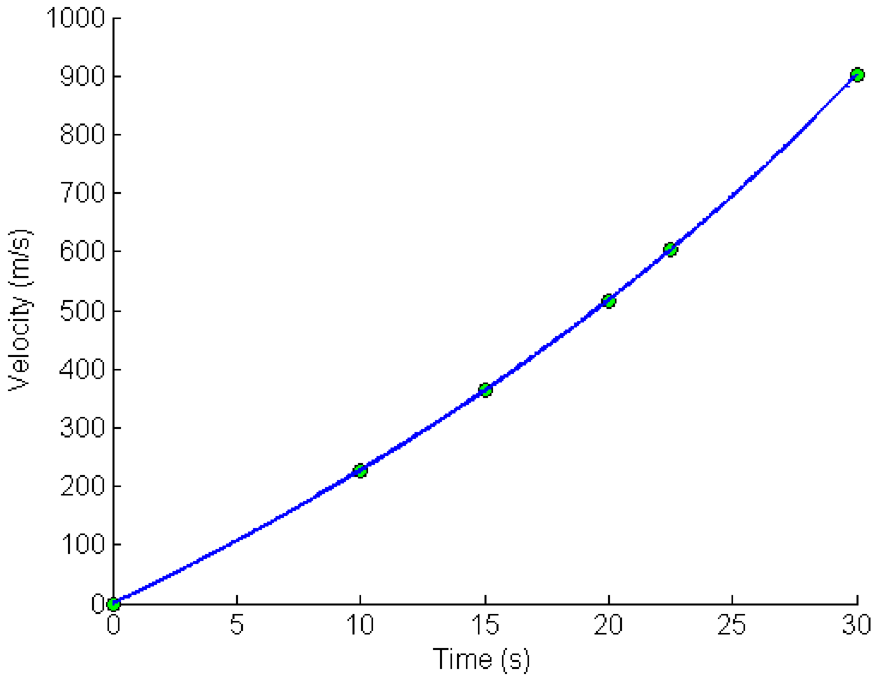


Figure 1 Graph of upward velocity of the rocket vs. time.

The acceleration at t=16 is given by $a(16)=\frac{d}{dt}v(t)\Big|_{t=16}$

Given that $v(t)=-4.3810+21.289t+0.13065t^{2}+0.0054606t^{3}, 10\le t\le 22.5$

$$a(t)=\frac{d}{dt}v(t)=\frac{d}{dt}\left(-4.3810+21.289t+0.13065t^{2}+0.0054606t^{3}\right)$$

$$=21.289+0.26130t+0.016382t^{2},\quad 10\le t\le 22.5$$

$$a(16)=21.289+0.26130(16)+0.016382(16)^{2}=29.664\mathrm{m/s}^{2}$$

Lagrange Polynomial

In this method, given $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, one can fit a $(n-1)^{th}$ order Lagrangian polynomial

given by

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, f(x_i)$$

where ' n ' in $f_n(x)$ stands for the n^{th} order polynomial that approximates the function

$y = f(x)$ given at $(n+1)$ data points as $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots\ldots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$, and

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$L_i(x)$ a weighting function that includes a product of $(n-1)$ terms with terms of $j = i$ omitted.

Then to find the first derivative, one can differentiate $f_n(x)$ once, and so on for other derivatives.

For example, the second order Lagrange polynomial passing through $(x_0, y_0),(x_1, y_1),(x_2, y_2)$ is

$$f_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

Differentiating equation (2) gives

$$f_2'(x)=\frac{2x-(x_1+x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{2x-(x_0+x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{2x-(x_0+x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

Differentiating again would give the second derivative as

$$f_2''(x)=\frac{2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

Example 3 The upward velocity of a rocket is given as a function of time in Table 3.

Table 3 Velocity as a function of time

t(s)	v(t)(m/s)
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67

Determine the value of the acceleration at $t=16s$ using the second order Lagrangian polynomial interpolation for velocity.

Solution

$$v(t)=\left(\frac{t-t_1}{t_0-t_1}\right)\left(\frac{t-t_2}{t_0-t_2}\right)v(t_0)+\left(\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right)\left(\frac{t-t_2}{t_1-t_2}\right)v(t_1)+\left(\frac{t-t_0}{t_2-t_0}\right)\left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right)v(t_2)$$

$$a(t)=\frac{2t-(t_1+t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)}v(t_0)+\frac{2t-(t_0+t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)}v(t_1)+\frac{2t-(t_0+t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)}v(t_2)$$

$$a(16)=\frac{2(16)-(15+20)}{(10-15)(10-20)}(227.04)+\frac{2(16)-(10+20)}{(15-10)(15-20)}(362.78)+\frac{2(16)-(10+15)}{(20-10)(20-15)}(517.35)$$

$$=-0.06(227.04)-0.08(362.78)+0.14(517.35)$$

$$=29.784\,\mathrm{m/s}^2$$

انتگرالگیری عددی

برای محاسبه $\int_a^b f(x)dx$ هرگاه تابع اولیه f موجود نباشد و یا f به صورت جدولی داده شده باشد.

واضح است که انتگرال معین را می توان به عنوان مساحت زیر منحنی y=f(x) که محصور است به محور xها، خطوط x=a و x=b تعبیر کرد و با تقسیم فاصله [a, b] به چند زیر فاصله و جمع کردن مساحتهای مربوط به این فاصله ها مقدار انتگرال را محاسبه کرد.

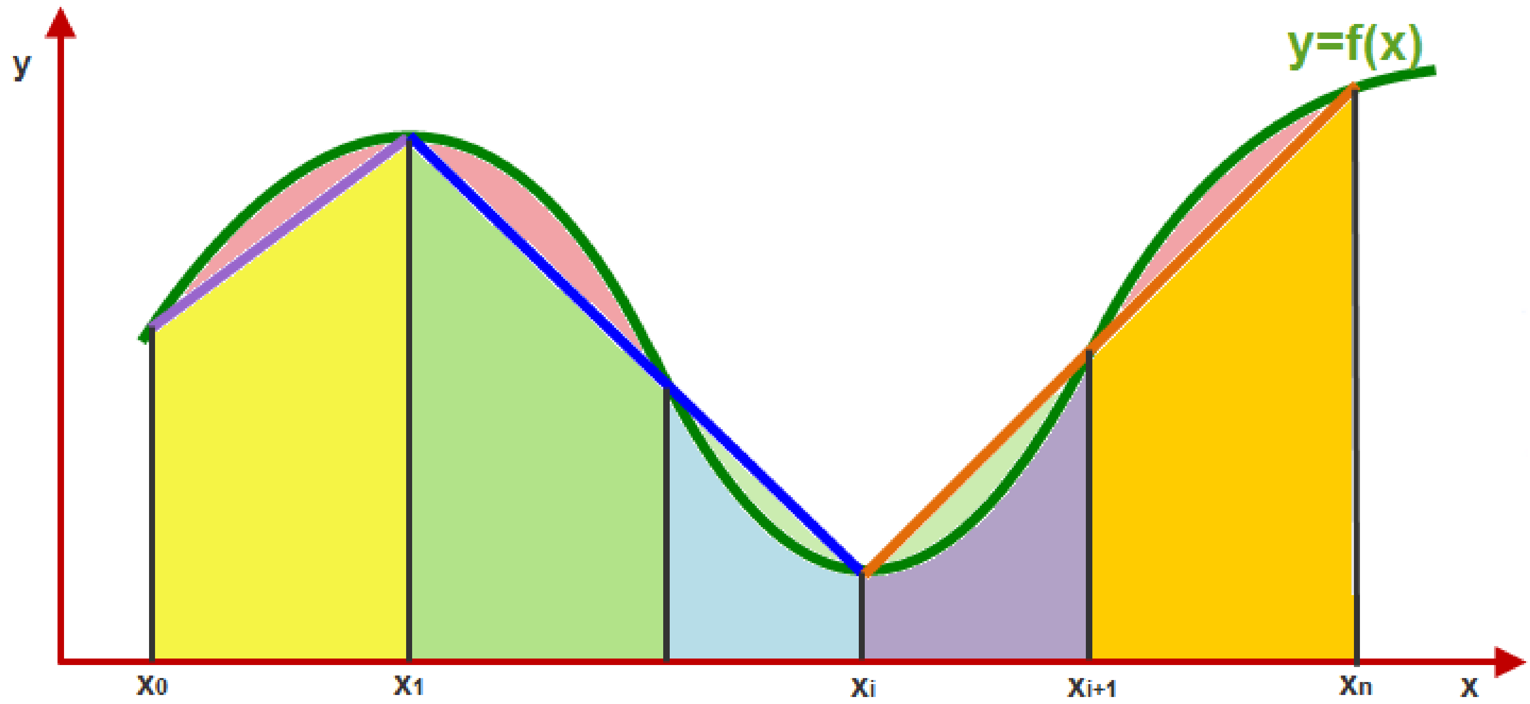
فرض کنید [a, b] به n قسمت مساوی به صورت زیر تقسیم شود:

$$[x_i, x_{i+1}] \quad , \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$x_{i+1} - x_i = h$$

$$\int_a^b f(x)dx \quad \Rightarrow \quad h = \frac{b-a}{n}$$

قاعده ذوزنقه ای



در فاصله $[x_i, x_{i+1}]$ از تقریب زیر برای محاسبه مساحت زیر منحنی استفاده می شود:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \cong \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\cong \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + \cdots + \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) + \ldots + \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n)$$

$$= \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n]$$

$$\boxed{\int_{a}^{b} f(x)dx \cong T(h) = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n]}$$

تقریبهای از $\int_{0.1}^{0.3} e^x dx$ را به روش ذوزنقه ای و به ازای h=0.2, 0.1, 0.05 به دست آورید؟.

$f(x) = e^x$, a=0.1 b=0.3

$$\int_a^b f(x)dx \cong T(h) = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n]$$

$$\int_{0.1}^{0.3} e^x dx \cong T(0.2) = \frac{0.2}{2}[f(0.1) + f(0.3)] = 0.24550$$

$$\int_{0.1}^{0.3} e^x dx \cong T(0.1) = \frac{0.1}{2}[f(0.1) + 2f(0.2) + f(0.3)] = 0.24489$$

$$\int_{0.1}^{0.3} e^x dx \cong T(0.05) = \frac{0.05}{2}[f(0.1) + 2f(0.15) + 2f(0.2) + 2f(0.25) + f(0.3)] = 0.24474$$

```
>> syms x
>> f=exp(x);
 >> int(f)
 ans =
 exp(x)
 >> int(f,0.1,0.3)
 ans =
 exp(3/10) - exp(1/10)
 >> double(ans)
ans =
   0.2447
```

قاعده سیمپسون

در قاعده ذوزنقه ای برای تقریب $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ یک چند جمله ای درجه یک(یک خط) را جایگزین تابع f(x) می کنیم، ولی در روش سیمپسون یک چند جمله ای درجه دوم را جایگزین تابع f در فاصله $[x_i, x_{i+2}]$ می کنیم و از آن تقریب زیر را خواهیم داشت:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \cong \frac{h}{3}(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2})$$

برای به دست آوردن فرمول قاعده سیمپسون در سراسر فاصله $[x_0, x_n]$ چون رابطه قبلی تقریبی برای فاصله $[x_i, x_{i+2}]$ است ، لذا باید n زوج باشد، یعنی تعداد نقاط فرد باشد.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong$$

$$= \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2] + \frac{h}{3}[f_2 + 4f_3 + f_4] + \cdots + \frac{h}{3}[f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n]$$

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong S(h) = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n]}$$

تقریبهای از $\int_1^{1.3}\sqrt{x}dx$ را به روش سیمپسون و به ازای h=0.15, 0.05 به دست آورید؟.

$f(x)=\sqrt{x}$, a=1 b=1.3

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong S(h)=\frac{h}{3}[f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+\cdots+2f_{n-2}+4f_{n-1}+f_n]}$$

$$\int_1^{1.3}\sqrt{x}dx \cong S(0.15)=\frac{0.15}{3}[f(1)+4f(1.15)+f(1.3)]=0.321485$$

$$\int_1^{1.3}\sqrt{x}dx \cong S(0.05)=$$
$$\frac{0.05}{3}[f(1)+4f(1.05)+2f(1.1)+4f(1.15)+2f(1.2)+4f(1.25)+f(1.3)]$$
$$=0.32149$$

```
>> syms x
>> f=sqrt(x);
>> int(f)
 ans =
 (2*x^(3/2))/3
 >> int(f,1,1.3)
 ans =
 (13*130^(1/2))/150 - 2/3
 >> double(ans)
ans =
    0.3215
```

قاعده های دیگر انتگرالگیری

در فرمول قاعده ذوزنقه ای داشتیم

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \cong \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) = \frac{h}{2}f_i + \frac{h}{2}f_{i+1} = \sum_{k=i}^{i+1} A_k f_k$$

که در آن $A_i = A_{i+1} = \frac{h}{2}$

در فرمول قاعده سیمپسون نیز داشتیم

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \cong \frac{h}{3}(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}) = \frac{h}{3}f_i + \frac{4h}{3}f_{i+1} + \frac{h}{3}f_{i+2} = \sum_{k=i}^{i+2} A_k f_k$$

در حالت کلی داریم:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f_k + E = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + E$$

$x_0, x_1, \dots, x_n$

به عنوان مجهول می باشند.

$A_0, A_1, \dots, A_n$

روش نیوتن-کاتس

در این روش نقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ معلوم فرض می شوند، مثلا متساوی الفاصله و به صورت زیر داریم:

$$x_{i+1} = x_i + h \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

بنابراین در رابطه زیر مجهولات عبارتند از $n+1$ ضریب: $A_0, A_1, \dots, A_n$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f_k + E = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + E$$

برای به دست آوردن این ضرایب فرض می کنیم برای توابع زیر مقدار خطا صفر است:

$$f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^n$$

ضرایب مجهول A_k را طوری پیدا می کنیم که خطای عبارت $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ به عنوان تقریب

$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$ برای چند جمله ایهای تا درجه n صفر باشد.

هر گاه فرض کنیم $x_0 = 0$ در اینصورت فرمول قاعده چهار نقطه ای به صورت زیر بیان می شود:

$$\int_0^{3h} f(x)dx = \sum_{k=0}^{3} A_k f_k + E$$

که در آن $x_k = kh$ ، یعنی:

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = h, \qquad x_2 = 2h, \qquad x_3 = 3h$$

برای به دست آوردن ضرایب A_0 تا A_3 برای محاسبه انتگرال مقدار E را برای توابع زیر برابر صفر قرار می دهیم:

$$f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^n$$

هر گاه *f(x)=1* در اینصورت:

$$\int_0^{3h} f(x)dx = \int_0^{3h} dx = 3\mathrm{h}$$

از طرفی برای *E=0* مقدار سمت راست رابطه عبارت است از:

$$\int_0^{3h} f(x)dx = \sum_{k=0}^{3} A_k f_k = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$$

بنابراین داریم:

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 3h$$

به طور مشابه برای $f(x)=x$ داریم:

$$hA_1 + 2hA_2 + 3hA_3 = \frac{9h^2}{2}$$

زیرا

$$\int_0^{3h} f(x)dx = \int_0^{3h} xdx = \frac{1}{2}(9h^2)$$

$$\int_0^{3h} f(x)dx = \sum_{k=0}^{3} A_k f_k = \sum_{k=0}^{3} A_k x_k = 0 + A_1 h + 2hA_2 + 3h\,A_3$$

به طور مشابه:

$$f(x) = x^2 \rightarrow \int_0^{3h} x^2 dx = 9h^3 = h^2 A_1 + 4h^2 A_2 + 9h^2 A_3$$

$$f(x) = x^3 \rightarrow \int_0^{3h} x^3 dx = \frac{81h^4}{4} = h^3 A_1 + 8h^3 A_2 + 27h^3 A_3$$

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 3h \\ hA_1 + 2hA_2 + 3hA_3 = \dfrac{9h^2}{2} \\ h^2A_1 + 4h^2A_2 + 9h^2A_3 = 9h^3 \\ h^3A_1 + 8h^3A_2 + 27h^3A_3 = \dfrac{81h^4}{4} \end{cases} \Rightarrow \quad A_0 = \frac{3h}{8},\quad A_1 = \frac{9h}{8},\quad A_2 = \frac{9h}{8},\quad A_3 = \frac{3h}{8}$$

فرمول چهار نقطه ای نیوتن-کاتس

$$\int_0^{3h} f(x)dx \cong \frac{3h}{8}(\mathrm{f}(0) + 3\mathrm{f}(\mathrm{h}) + 3\mathrm{f}(2\mathrm{h}) + \mathrm{f}(3\mathrm{h}))$$

با تغییر متغیر مقابل فرمول قاعده چهار نقطه ای به صورت زیر خواهد شد: $X = x_0 + x$

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_3} f(X)dX \cong \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)}$$

با استفاده از فرمول قاعده چهار نقطه ای نیوتن کاتس مقدار انتگرال زیر را به دست آورید.

$$\int_0^1 xe^x dx$$

چون فرمول چهار نقطه ای است پس n=3 و از آن داریم:

$$h = \frac{1-0}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_3 = 1$$

بنابراین:

$$\int_0^1 xe^x dx \cong \frac{1}{8}\left[f(0) + 3f\left(\frac{1}{3}\right) + 3f\left(\frac{2}{3}\right) + f(1)\right] =$$

$$\frac{1}{8}\left[0 + e^{\frac{1}{3}} + e^{\frac{2}{3}} + e^1\right] = 1.0017$$

```
>> syms x
>> f=x*exp(x);
>> int(f)
ans =
exp(x)*(x - 1)
>> int(f,0,1)
ans =
1
>> double(ans)
ans =
     1
```

روش گاوس

در روش گاوس نقاط و ضرایب مجهول فرض می شوند، پس در فرمول

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + E$$

$$x_0, x_1, \dots, x_n$$

بنابراین، n+1 نقطه و n+1 ضریب مجهول داریم

$$A_0, A_1, \dots, A_n$$

به منظور به دست آوردن این 2n+2 مجهول برای توابع زیر E=0 در نظر می گیریم:

$$f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^{2n+1}$$

فرمولهای قاعده گاوس برای فاصله [-1, 1] به دست می آیند.

واضح است که فاصله های [a, b] و [-1, 1] را به سادگی می توان با تغییر متغیر زیر به هم تبدیل کرد.

فرض کنید $x\in[a, b]$ و $u\in[-1, 1]$ در اینصورت داریم.

$$\boxed{x=\frac{1}{2}[(b-a)u+(b+a)]} \Rightarrow dx=\frac{b-a}{2}du$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(u)du} \quad \text{و} \quad \boxed{g(u)=f\left(\frac{1}{2}((b-a)u+(b+a))\right)}$$

فرمول دونقطه ای گاوس

هر گاه فرمول دو نقطه ای گاوس را بخواهیم به دست آوریم بایستی داشته باشیم:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=0}^{1} A_k f(x_k) + E$$

که برای توابع مقابل، E=0

$$f(x) = 1, x, x^2, x^3$$

پس داریم:

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad A_0 = A_1 = 1$$

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)dx \cong f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$$

با استفاده از روش دو نقطه ای گاوس انتگرال زیر را محاسبه نمایید؟.

$$\int_0^{\pi/2} sinx\, dx$$

با تغییر متغیر

$$x=\frac{1}{2}[(b-a)u+(b+a)] \Rightarrow x=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}u+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi(u+1)}{4}$$

$$g(u)=f\left(\frac{1}{2}((b-a)u+(b+a))\right)=sin\left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}-0\right)u+\left(\frac{\pi}{2}+0\right)\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi(u+1)}{4}\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(u)du \Rightarrow \int_0^{\pi/2} sinx\, dx=\frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1} sin\left(\frac{\pi(u+1)}{4}\right)du$$

$$\boxed{\int_{-1}^{1} g(u)du\cong g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0.32589+0.94541=1.2713}$$

$$\int_0^{\pi/2} sinx\, dx=\frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1} sin\left(\frac{\pi(u+1)}{4}\right)du=\frac{\pi}{4}\times 1.2713=0.99848$$

با استفاده از روش دو نقطه ای گاوس انتگرال زیر را محاسبه نمایید؟.

$$\int_1^2 \frac{sin^2 x}{x}\,dx$$

$$x = \frac{1}{2}\left[(b-a)u + (b+a)\right]$$

$$x = \frac{1}{2}(u+3) = \frac{(u+3)}{2}$$

$$dx = \frac{b-a}{2}du = \frac{1}{2}du$$

$$\int_1^2 \frac{sin^2 x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{sin^2\left(\frac{(u+3)}{2}\right)}{\frac{(u+3)}{2}}du \cong \int_{-1}^{1}\frac{sin^2\left(\frac{(u+3)}{2}\right)}{u+3}du =$$

$$g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0.361691231 + 0.266475236 = 0.628166467$$

فرمول سه نقطه ای گاوس

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \cong \frac{1}{9}\left[5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+8f(0)+5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]$$

با استفاده از روش سه نقطه ای گاوس انتگرال زیر را محاسبه نمایید؟.

$$\int_{1}^{2} \frac{sin^2 x}{x}\, dx$$

$$x=\frac{1}{2}[(b-a)u+(b+a)]$$

$$x=\frac{1}{2}(u+3)=\frac{(u+3)}{2}$$

$$dx=\frac{b-a}{2}du=\frac{1}{2}du$$

$$\int_{1}^{2} \frac{sin^2 x}{x}\, dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{sin^2\left(\frac{(u+3)}{2}\right)}{\frac{(u+3)}{2}}du \cong \int_{-1}^{1} \frac{sin^2\left(\frac{(u+3)}{2}\right)}{u+3}du=$$

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)dx \cong \frac{1}{9}\left[5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{9}[5 \times 0.361473246 + 8 \times 0.331665416 + 5 \times 0.239264512] = 0.628556902$$

$$\int_{1}^{2} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx \cong 0.628556902$$

انتگرالهای منفرد

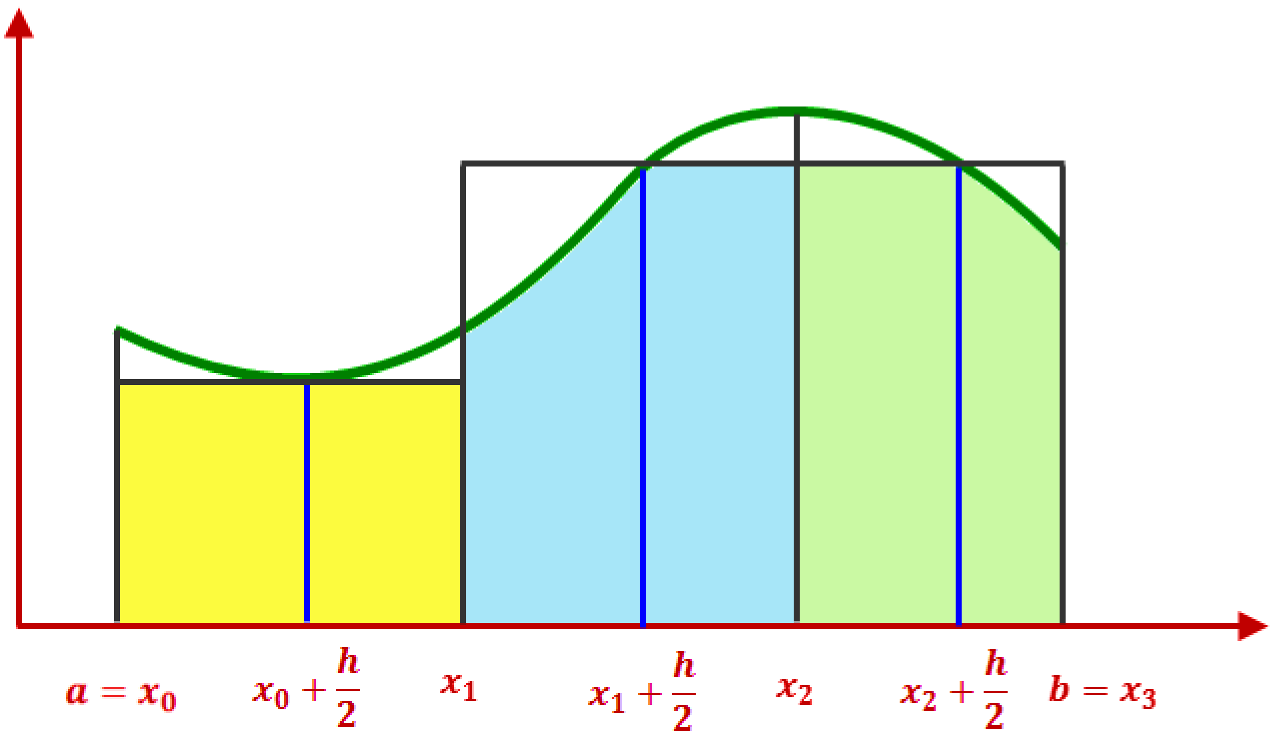
$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

که در آن توابعی که می خواهیم انتگرال آنها را محاسبه کنیم در یک یا هر دو نقطه انتهایی فاصله انتگرالگیری تعریف نشده اند.

این نقطه را نقطه منفرد یا تکین تابع می نامیم.

قاعده نقطه میانی

برای محاسبه مساحت زیر نمودار f در فاصله $[x_i, x_{i+1}]$ مساحت مستطیل به عرض h و طول $f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$ را محاسبه می کنیم.



$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \cong h f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$$

بنابراین قاعده نقطه میانی به شرح زیر خواهد بود:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \cdots + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \cong M(h) = h\left[f(x_0 + \frac{h}{2}) + \cdots + f(x_i + \frac{h}{2}) + \cdots + f(x_{n-1} + \frac{h}{2})\right]$$

با استفاده از روش نقطه میانی انتگرال زیر را محاسبه نمایید؟.(h=0.01 و h=0.03)

$$\int_{0}^{0.09} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$\boxed{\int_{a}^{b} f(x)dx \cong M(h) = h\left[f(x_0+\frac{h}{2}) + \cdots + f(x_i+\frac{h}{2}) + \cdots + f(x_{n-1}+\frac{h}{2})\right]}$$

$$x = 0, 0.03, 0.06, 0.09$$

$$\int_{0}^{0.09} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \cong M(0.03) = 0.03[f(0.015) + f(0.045) + f(0.075)] = 0.4959$$

$$x = 0, 0.01, 0.02, \ldots, 0.08, 0.09$$

$$\int_{0}^{0.09} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \cong M(0.01) = 0.01[f(0.005) + f(0.015) + \cdots + f(0.085)] = 0.539587$$

$$\int_{0}^{0.09} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \cong M(0.03) = 0.4959$$

$$\int_{0}^{0.09} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \cong M(0.01) = 0.539587$$

مقدار واقعی انتگرال عبارتست از

$$\int_{0}^{0.09} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \left[2\sqrt{x}\right]_{0}^{0.09} = 0.6$$

بنابراین خطای M(0.03) با مقدار واقعی حدود 0.104 و خطای M(0.01) با مقدار واقعی حدود 0.06 می باشد.

خطای روشهای انتگرالگیری

خطای روش ذوزنقه

فرمول قاعده ذوزنقه ای را برای محاسبه $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx$ به وسیله چند جمله ای درونیاب f که در نقاط x_i و x_{i+1} با f هم مقدار است، به دست می آوریم.

$$ET(h) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\beta), \qquad \beta \in [a,b]$$

نکته۱.

خطای قاعده ذوزنقه ای متناسب با توان دوم h است، بنابراین هرگاه h نصف شود مقدار خطا $\frac{1}{4}$ خواهد شد.

نکته۲.

قاعده ذوزنقه ای برای چند جمله ای های تا درجه یک دقیق است زیرا مشتق مرتبه دوم در این توابع صفر است.

توجه: هر گاه M_2 یک کران بالا برای $|f''(x)|$ باشد، یعنی:

$$|f''(x)| \le M_2, \qquad x \in [a, b]$$

$$\boxed{|ET(h)| \le \frac{(b-a)}{12} h^2 M_2}$$

نتیجه: نامساوی برای برآورد h، به طوریکه خطای T(h) از مقدار معینی بیشتر نباشد به کار می رود.
مثلا هر گاه بخواهیم $|ET(h)| \le \varepsilon$ کافی است h را طوری پیدا کنیم که داشته باشیم:

$$\boxed{\frac{(b-a)}{12} h^2 M_2 \le \varepsilon}$$

تقریبی از انتگرال زیر را به دست آورید به طوری که خطای آن حداکثر 10^{-2} باشد؟.

$$\int_0^1 x\, sinx\, dx$$

داریم: $a = 0, b = 1, \qquad \varepsilon = 10^{-2}$

M_2 را به طریق زیر بدست می آوریم:

$$f''(x) = 2\, cosx - x\, sinx$$

بنابراین:

$$|f''(x)| = |2\, cosx - x\, sinx| \le 2|cosx| + |x||sinx| \le 2 + 1 = 3$$

پس $M_2 = 3$ ، بنابراین بایستی h را طوری به دست آوریم که داشته باشیم:

$$\boxed{\frac{(b-a)}{12} h^2 M_2 \le \varepsilon} \Rightarrow \frac{(1-0)}{12} h^2 3 \le 10^{-2} \Rightarrow \frac{h^2}{4} \le 10^{-2} \Rightarrow h \le 0.2$$

بنابراین داریم: $h = 0.2$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \cong T(h) = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n]}$$

$$\int_0^1 x\,sinx dx \cong T(0.2) =$$

$$\frac{0.2}{2}[0 + 2(0.2sin0.2 + 0.4sin0.4 + 0.6sin0.6 + 0.8sin0.8) + sin1]$$

$$\int_0^1 x\,sinx dx \cong 0.30578$$

خطای روش سیمپسون

هرگاه ES(h) خطای روش انتگرالگیری سیمپسون با طول زیر فاصله h باشد

$$ES(h) \cong -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\eta), \qquad \eta \in [a,b]$$

نکته۱.

خطای S(h) متناسب با توان چهارم h است و روش سیمپسون برای چند جمله ایهای تا درجه ۳ دقیق است.

نکته۲.

چون η مقداری نامعلوم است، لذا هرگاه داشته باشیم $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq M_4, \qquad x \in [a,b]$

بنابراین کران بالای خطای زیر را برای S(h) خواهیم داشت:

$$\boxed{|ES(h)| \leq \frac{(b-a)}{180} h^4 M_4}$$

با استفاده از رابطه بالا می توان S(h) را با دقتی که از قبل تعیین می شود حساب کرد. مثلا هرگاه بخواهیم S(h) را چنان به دست آوریم که

$$|ES(h)| \leq \varepsilon$$

کافی است h را چنان تعیین کنیم که:

$$\boxed{\frac{(b-a)}{180} h^4 M_4 \leq \varepsilon}$$

h را طوری به دست آورید که S(h) مقدار انتگرال زیر را با حداکثر خطای 10^{-5} تعیین کند.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, cosx dx$$

داریم: $\varepsilon = 10^{-5}$ $\quad a = 0, b = \frac{\pi}{2},$ $\quad f(x) = x\, cosx$

M_4 را به طریق زیر بدست می آوریم:

$$f^{(4)}(x) = 4\, sinx + x\, cosx$$

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

$$\left|f^{(4)}(x)\right| = |4\, sinx + x\, cosx| \le 4|sinx| + |x||cosx| \le 4 + \frac{\pi}{2} < 6$$

$$\boxed{\frac{(b-a)}{180} h^4 M_4 \le \varepsilon} \Rightarrow \frac{\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)}{180} h^4 6 \le 10^{-5} \Rightarrow \frac{\pi h^4}{60} \le 10^{-5}$$

$$\Downarrow$$

$$h \le 0.1 \times \sqrt{\frac{6}{\pi}} \cong 0.1176$$

لذا چون داریم $\pi h = b - a = \frac{\pi}{2}$ پس $n = \frac{\pi}{2h}$

$$n = \frac{\pi}{2h} \geq \frac{\pi}{2 \times 0.1176} = 13.3571$$

چون در روش سیمپسون باید n زوج باشد، لذا n=14 و داریم:

$$h = \frac{\pi/2}{n} = \frac{\pi}{28} \cong 0.1122 \leq 0.1176$$

خطای قاعده نقطه میانی

هرگاه EM(h) خطای قاعده نقطه میانی باشد:

$$EM(h) \cong \frac{(b-a)}{24} h^2 f^{(2)}(\eta), \qquad \eta \in [a,b]$$

هرگاه $f^{(2)} \leq M_2$ در اینصورت:

$$\boxed{|EM(h)| \cong \frac{(b-a)}{24} h^2 M_2}$$

نکته.

خطای قاعده نقطه میانی متناسب با توان دوم h است، بنابراین هرگاه h نصف شود مقدار خطا $\frac{1}{4}$ خواهد شد.
و روش نقطه میانی برای چندجمله ایهای تا درجه یک دقیق است.

مطالعه آزاد

http://numericalmethods.eng.usf.edu

What is Integration

Integration:

The process of measuring the area under a function plotted on a graph.

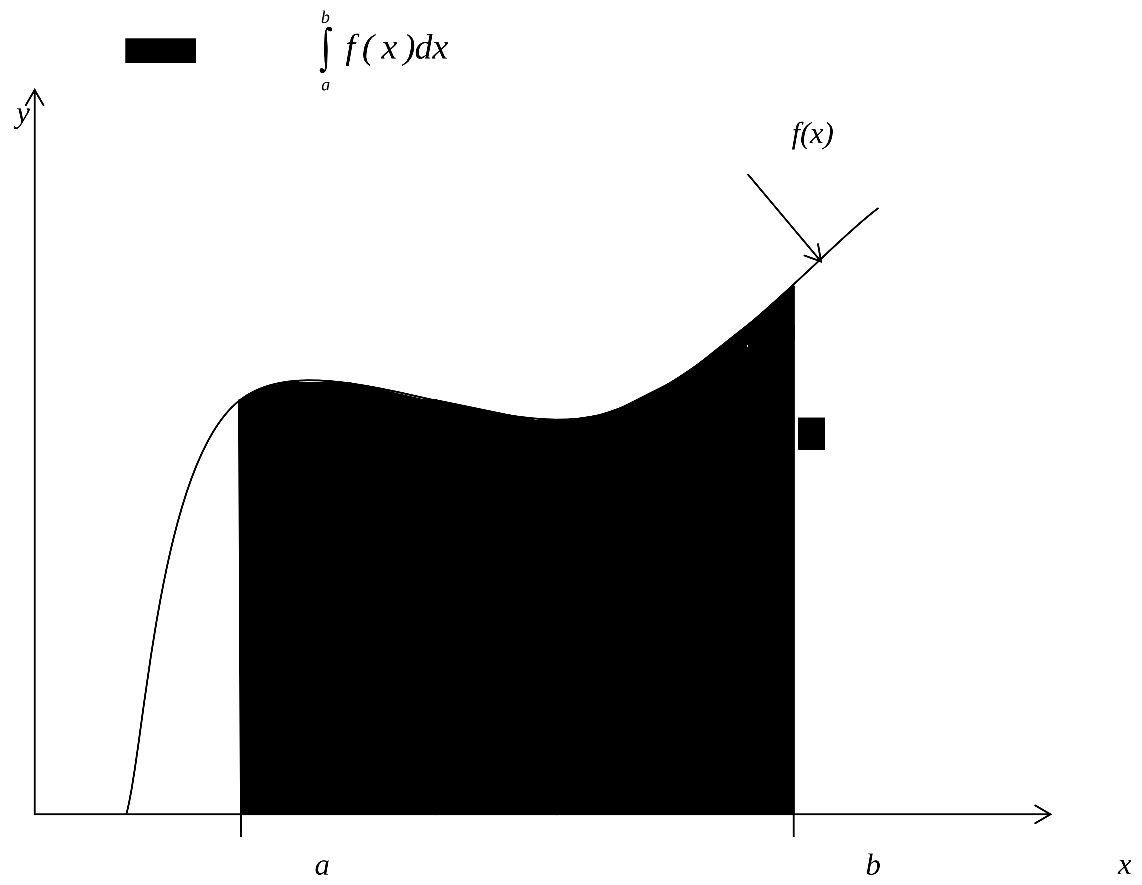
$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Where:

f(x) is the integrand

a= lower limit of integration

b= upper limit of integration



Basis of Trapezoidal Rule

Trapezoidal Rule is based on the Newton-Cotes Formula that states if one can approximate the integrand as an n^{th} order polynomial…

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

where $$f(x) \approx f_n(x)$$

and

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

Basis of Trapezoidal Rule

Then the integral of that function is approximated by the integral of that n[th] order polynomial.

$$\int_a^b f(x) \approx \int_a^b f_n(x)$$

Trapezoidal Rule assumes n=1, that is, the area under the linear polynomial,

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]$$

Method Derived From Geometry

The area under the curve is a trapezoid. The integral

$$\int_a^b f(x)dx \approx Area\ of\ \ trapezoid$$

$$=\frac{1}{2}(Sum\ of\ \ parallel\ sides)(height)$$

$$=\frac{1}{2}\left(f(b)+f(a)\right)(b-a)$$

$$=(b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]$$

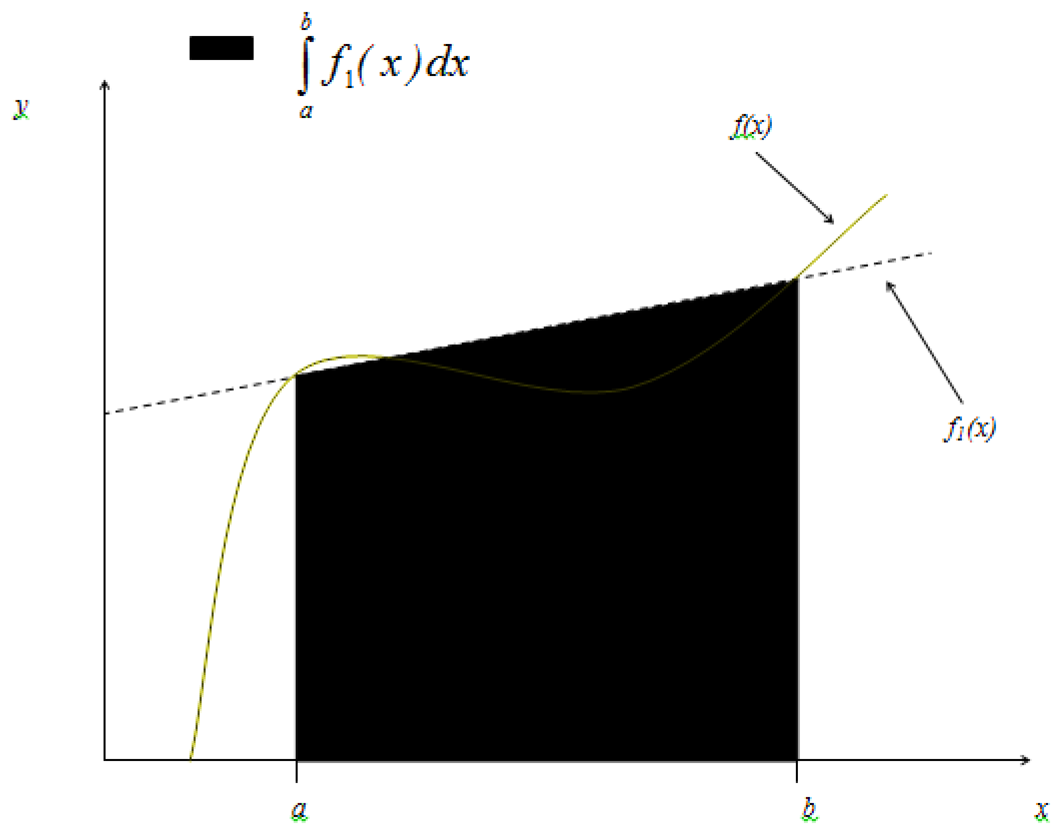


Figure 2: Geometric Representation

Example 1

The vertical distance covered by a rocket from t=8 to t=30 seconds is given by:

$$x = \int_{8}^{30} \left(2000 ln\left[\frac{140000}{140000 - 2100t} \right] - 9.8t \right) dt$$

a) Use single segment Trapezoidal rule to find the distance covered.
b) Find the true error, E_t for part (a).
c) Find the absolute relative true error, $|\in_a|$ for part (a).

Solution

a) $$I \approx (b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right] \qquad a=8 \qquad b=30$$

$$f(t)=2000ln\left[\frac{140000}{140000-2100t}\right]-9.8t$$

$$f(8)=2000ln\left[\frac{140000}{140000-2100(8)}\right]-9.8(8) \quad =177.27\ m/s$$

$$f(30)=2000ln\left[\frac{140000}{140000-2100(30)}\right]-9.8(30) \quad =901.67\ m/s$$

a)

$$I = (30-8)\left[\frac{177.27+901.67}{2}\right] = 11868\, m$$

b) **The exact value of the above integral is**

$$x = \int_{8}^{30}\left(2000 ln\left[\frac{140000}{140000-2100t}\right]-9.8t\right)dt \qquad = 11061\, m$$

b) $E_t = True\ Value - Approximate\ Value \ = 11061 - 11868 \ = -807\ m$

c) **The absolute relative true error,** $\left|\in_t\right|$ **, would be**

$$\left|\in_t\right| = \left|\frac{11061-11868}{11061}\right| \times 100 = 7.2959\%$$

Multiple Segment Trapezoidal Rule

In Example 1, the true error using single segment trapezoidal rule was large. We can divide the interval [8,30] into [8,19] and [19,30] intervals and apply Trapezoidal rule over each segment.

$$f(t) = 2000 \ln\left(\frac{140000}{140000 - 2100t}\right) - 9.8t$$

$$\int_{8}^{30} f(t)dt = \int_{8}^{19} f(t)dt + \int_{19}^{30} f(t)dt$$

$$= (19-8)\left[\frac{f(8)+f(19)}{2}\right] + (30-19)\left[\frac{f(19)+f(30)}{2}\right]$$

Multiple Segment Trapezoidal Rule

With

$$f(8) = 177.27\ m/s$$

$$f(30) = 901.67\ m/s$$

$$f(19) = 484.75\ m/s$$

Hence:

$$\int_{8}^{30} f(t)dt = (19-8)\left[\frac{177.27+484.75}{2}\right] + (30-19)\left[\frac{484.75+901.67}{2}\right] = 11266\ m$$

Multiple Segment Trapezoidal Rule

The true error is: $E_t = 11061 - 11266 = -205\ m$

The true error now is reduced from -807 m to -205 m.

Extending this procedure to divide the interval into equal segments to apply the Trapezoidal rule; the sum of the results obtained for each segment is the approximate value of the integral.

Multiple Segment Trapezoidal Rule

Divide into equal segments as shown in Figure 4. Then the width of each segment is:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

The integral I is: $I = \int_a^b f(x)dx$

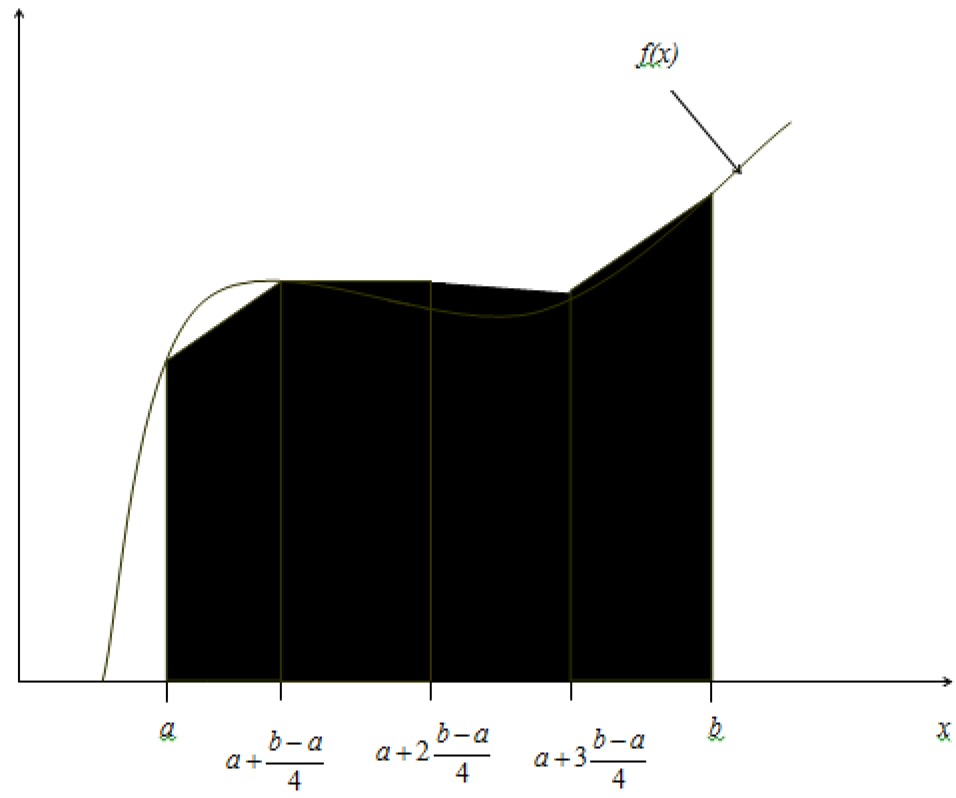


Figure 4: Multiple (n=4) Segment Trapezoidal Rule

Multiple Segment Trapezoidal Rule

The integral *I* can be broken into *h* integrals as:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{a+h} f(x)dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)dx + \ldots + \int_{a+(n-2)h}^{a+(n-1)h} f(x)dx + \int_{a+(n-1)h}^{b} f(x)dx$$

Applying Trapezoidal rule on each segment gives:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left[f(a)+2\left\{\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right\}+ f(b)\right]$$

Example 2

The vertical distance covered by a rocket from to seconds is given by:

$$x = \int_{8}^{30} \left(2000\, ln\left[\frac{140000}{140000 - 2100t} \right] - 9.8t \right) dt$$

a) Use two-segment Trapezoidal rule to find the distance covered.
b) Find the true error, E_t for part (a).
c) Find the absolute relative true error, $|\in_a|$ for part (a).

Solution

a) The solution using 2-segment Trapezoidal rule is

$$I = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) \right\} + f(b) \right]$$

$$n = 2 \qquad a = 8 \qquad b = 30$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{30-8}{2} = 11$$

Then:

$$I = \frac{30-8}{2(2)}\left[f(8) + 2\left\{ \sum_{i=1}^{2-1} f(a+ih) \right\} + f(30) \right]$$

$$= \frac{22}{4}\left[f(8) + 2f(19) + f(30) \right]$$

$$= \frac{22}{4}\left[177.27 + 2(484.75) + 901.67 \right]$$

$$= 11266\ m$$

b) The exact value of the above integral is

$$x = \int_{8}^{30}\left(2000\,ln\left[\frac{140000}{140000-2100t}\right]-9.8t\right)dt \quad = 11061\,m$$

so the true error is $E_t = True\ Value - Approximate\ Value \ = 11061 - 11266$

The absolute relative true error, $|\in_t|$ **, would be**

$$|\in_t| = \left|\frac{\text{True Error}}{\text{True Value}}\right| \times 100$$

$$= \left|\frac{11061-11266}{11061}\right| \times 100$$

$$= 1.8534\%$$

Table 1 gives the values obtained using multiple segment Trapezoidal rule for:

$$x = \int_{8}^{30} \left(2000\, ln\left[\frac{140000}{140000 - 2100t} \right] - 9.8t \right) dt$$

n	Value	E_t	$\lvert\in_t\rvert\%$	$\lvert\in_a\rvert\%$
1	11868	-807	7.296	---
2	11266	-205	1.853	5.343
3	11153	-91.4	0.8265	1.019
4	11113	-51.5	0.4655	0.3594
5	11094	-33.0	0.2981	0.1669
6	11084	-22.9	0.2070	0.09082
7	11078	-16.8	0.1521	0.05482
8	11074	-12.9	0.1165	0.03560

Table 1: Multiple Segment Trapezoidal Rule Values

Example 3

Use Multiple Segment Trapezoidal Rule to find the area under the curve

$$f(x)=\frac{300x}{1+e^{x}} \quad \text{from} \quad x=0 \quad \text{to} \quad x=10$$

Using two segments, we get $h=\dfrac{10-0}{2}=5$

$$f(0)=\frac{300(0)}{1+e^{0}}=0$$

$$f(5)=\frac{300(5)}{1+e^{5}}=10.039$$

$$f(10)=\frac{300(10)}{1+e^{10}}=0.136$$

Solution

Then:

$$I = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) \right\} + f(b) \right]$$

$$= \frac{10-0}{2(2)}\left[f(0) + 2\left\{ \sum_{i=1}^{2-1} f(0+5) \right\} + f(10) \right]$$

$$= \frac{10}{4}\left[f(0) + 2f(5) + f(10) \right] = \frac{10}{4}\left[0 + 2(10.039) + 0.136 \right]$$

$$= 50.535$$

So what is the true value of this integral?

$$\int_0^{10} \frac{300x}{1+e^x}\,dx = 246.59$$

Making the absolute relative true error:

$$\left|\in_t\right| = \left|\frac{246.59 - 50.535}{246.59}\right| \times 100\% = 79.506\%$$

Table 2: Values obtained using Multiple Segment Trapezoidal Rule for:

$$\int_0^{10} \frac{300x}{1+e^x}\,dx$$

n	Approximate Value	E_t	$\|\in_t\|$
1	0.681	245.91	99.724%
2	50.535	196.05	79.505%
4	170.61	75.978	30.812%
8	227.04	19.546	7.927%
16	241.70	4.887	1.982%
32	245.37	1.222	0.495%
64	246.28	0.305	0.124%

Error in Multiple Segment Trapezoidal Rule

The true error for a single segment Trapezoidal rule is given by:

$$E_t = \frac{(b-a)^3}{12} f''(\zeta), \quad a < \zeta < b$$ **where** ζ **is some point in** $[a,b]$

What is the error, then in the multiple segment Trapezoidal rule? It will be simply the sum of the errors from each segment, where the error in each segment is that of the single segment Trapezoidal rule.

The error in each segment is

$$E_1 = \frac{[(a+h)-a]^3}{12} f''(\zeta_1), \quad a < \zeta_1 < a+h \quad = \frac{h^3}{12} f''(\zeta_1)$$

Error in Multiple Segment Trapezoidal Rule

Similarly:

$$E_i = \frac{[(a+ih)-(a+(i-1)h)]^3}{12} f''(\zeta_i), \quad a+(i-1)h < \zeta_i < a+ih = \frac{h^3}{12} f''(\zeta_i)$$

It then follows that:

$$E_n = \frac{[b-\{a+(n-1)h\}]^3}{12} f''(\zeta_n), \quad a+(n-1)h < \zeta_n < b = \frac{h^3}{12} f''(\zeta_n)$$

Error in Multiple Segment Trapezoidal Rule

Hence the total error in multiple segment Trapezoidal rule is

$$E_t = \sum_{i=1}^{n} E_i \quad = \frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^{n} f''(\zeta_i) \quad = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \frac{\sum_{i=1}^{n} f''(\zeta_i)}{n}$$

The term $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f''(\zeta_i)}{n}$ **is an approximate average value of the** $f''(x),\ a < x < b$

Hence:

$$E_t = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \frac{\sum_{i=1}^{n} f''(\zeta_i)}{n}$$

Error in Multiple Segment Trapezoidal Rule

Below is the table for the integral $\int_{8}^{30}\left(2000\,ln\left[\frac{140000}{140000-2100t}\right]-9.8t\right)dt$

as a function of the number of segments. You can visualize that as the number of segments are doubled, the true error gets approximately quartered.

n	Value	E_t	$\left\|\in_t\right\|\%$	$\left\|\in_a\right\|\%$
2	11266	-205	1.854	5.343
4	11113	-51.5	0.4655	0.3594
8	11074	-12.9	0.1165	0.03560
16	11065	-3.22	0.02913	0.00401

Two-Point Gaussian Quadrature Rule

Basis of the Gaussian Quadrature Rule

Previously, the Trapezoidal Rule was developed by the method of undetermined coefficients. The result of that development is summarized below.

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(a) + c_2 f(b)$$

$$= \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b)$$

The two-point Gauss Quadrature Rule is an extension of the Trapezoidal Rule approximation where the arguments of the function are not predetermined as a and b but as unknowns x_1 and x_2. In the two-point Gauss Quadrature Rule, the integral is approximated as

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

The four unknowns x_1, x_2, c_1 and c_2 are found by assuming that the formula gives exact results for integrating a general third order polynomial,

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3.$$

Hence

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\right)dx$$

$$=\left[a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^3}{3}+a_3\frac{x^4}{4}\right]_a^b$$

$$=a_0(b-a)+a_1\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)+a_2\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right)+a_3\left(\frac{b^4-a^4}{4}\right)$$

It follows that

$$\int_a^b f(x)dx = c_1\left(a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^{\ 2} + a_3x_1^{\ 3}\right) + c_2\left(a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^{\ 2} + a_3x_2^{\ 3}\right)$$

Equating Equations the two previous two expressions yield

$$a_0(b-a) + a_1\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) + a_2\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right) + a_3\left(\frac{b^4-a^4}{4}\right)$$

$$= c_1\left(a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^{\ 2} + a_3x_1^{\ 3}\right) + c_2\left(a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^{\ 2} + a_3x_2^{\ 3}\right)$$

$$= a_0(c_1 + c_2) + a_1(c_1x_1 + c_2x_2) + a_2\left(c_1x_1^{\ 2} + c_2x_2^{\ 2}\right) + a_3\left(c_1x_1^{\ 3} + c_2x_2^{\ 3}\right)$$

Since the constants a_0, a_1, a_2, a_3 are arbitrary

$$b - a = c_1 + c_2$$

$$\frac{b^2 - a^2}{2} = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$\frac{b^3 - a^3}{3} = c_1 {x_1}^2 + c_2 {x_2}^2$$

$$\frac{b^4 - a^4}{4} = c_1 {x_1}^3 + c_2 {x_2}^3$$

The previous four simultaneous nonlinear Equations have only one acceptable solution,

$$x_1 = \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2} \qquad x_2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2}$$

$$c_1 = \frac{b-a}{2} \qquad c_2 = \frac{b-a}{2}$$

Hence Two-Point Gaussian Quadrature Rule

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$= \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2} \right) + \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b+a}{2} \right)$$

Higher Point Gaussian Quadrature Formulas

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

is called the three-point Gauss Quadrature Rule.

The coefficients c_1, c_2, and c_3, and the functional arguments x_1, x_2, and x_3

are calculated by assuming the formula gives exact expressions for

integrating a fifth order polynomial

$$\int_a^b \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5\right)dx$$

General n-point rules would approximate the integral

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \ldots\ldots\ldots + c_n f(x_n)$$

Arguments and Weighing Factors for n-point Gauss Quadrature Formulas

In handbooks, coefficients and arguments given for n-point Gauss Quadrature Rule are given for integrals

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} c_i g(x_i)$$

as shown in Table 1.

Table 1: Weighting factors c and function arguments x used in Gauss Quadrature Formulas.

Points	Weighting Factors	Function Arguments
2	$c_1 = 1.000000000$ $c_2 = 1.000000000$	$x_1 = -0.577350269$ $x_2 = 0.577350269$
3	$c_1 = 0.555555556$ $c_2 = 0.888888889$ $c_3 = 0.555555556$	$x_1 = -0.774596669$ $x_2 = 0.000000000$ $x_3 = 0.774596669$
4	$c_1 = 0.347854845$ $c_2 = 0.652145155$ $c_3 = 0.652145155$ $c_4 = 0.347854845$	$x_1 = -0.861136312$ $x_2 = -0.339981044$ $x_3 = 0.339981044$ $x_4 = 0.861136312$

Table 1 (cont.) : Weighting factors c and function arguments x used in Gauss Quadrature Formulas.

Points	Weighting Factors	Function Arguments
5	c_1 = 0.236926885 c_2 = 0.478628670 c_3 = 0.568888889 c_4 = 0.478628670 c_5 = 0.236926885	x_1 = -0.906179846 x_2 = -0.538469310 x_3 = 0.000000000 x_4 = 0.538469310 x_5 = 0.906179846
6	c_1 = 0.171324492 c_2 = 0.360761573 c_3 = 0.467913935 c_4 = 0.467913935 c_5 = 0.360761573 c_6 = 0.171324492	x_1 = -0.932469514 x_2 = -0.661209386 x_3 = -0.2386191860 x_4 = 0.2386191860 x_5 = 0.661209386 x_6 = 0.932469514

So if the table is given for $\int_{-1}^{1} g(x)dx$ integrals, how does one solve

$\int_{a}^{b} f(x)dx$? The answer lies in that any integral with limits of $[a, b]$

can be converted into an integral with limits $[-1, 1]$ Let

$$x = mt + c$$

If $x = a,$ then $t = -1$

If $x = b,$ then $t = 1$

Such that:

$$m = \frac{b-a}{2}$$

Then $c = \frac{b+a}{2}$

Hence $x = \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2}$ $\qquad dx = \frac{b-a}{2} dt$

Substituting our values of x, and dx into the integral gives us

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2}\right) \frac{b-a}{2} dt$$

Example 1

For an integral $\int_a^b f(x)dx$, derive the one-point Gaussian Quadrature Rule.

Solution

The one-point Gaussian Quadrature Rule is $\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1)$

The two unknowns x_1, and c_1 are found by assuming that the formula gives exact results for integrating a general first order polynomial,

$$f(x) = a_0 + a_1 x.$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (a_0 + a_1 x)dx = \left[a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2}\right]_a^b$$

$$= a_0(b-a) + a_1\left(\frac{b^2 - a^2}{2}\right)$$

It follows that $$\int_a^b f(x)dx = c_1(a_0 + a_1 x_1)$$

Equating Equations, the two previous two expressions yield

$$a_0(b-a) + a_1\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) = c_1(a_0 + a_1 x_1) = a_0(c_1) + a_1(c_1 x_1)$$

Since the constants a_0, and a_1 are arbitrary $$b - a = c_1 \qquad \frac{b^2-a^2}{2} = c_1 x_1$$

giving

$$c_1 = b - a$$

$$x_1 = \frac{b+a}{2}$$

Hence One-Point Gaussian Quadrature Rule

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) = (b-a)\ f\left(\frac{b+a}{2}\right)$$

Example 2

a) Use two-point Gauss Quadrature Rule to approximate the distance covered by a rocket from t=8 to t=30 as given by

$$x = \int_{8}^{30} \left(2000\, ln\left[\frac{140000}{140000 - 2100t} \right] - 9.8t \right) dt$$

b) Find the true error, E_t for part (a).

c) Also, find the absolute relative true error, $|\in_a|$ for part (a).

Solution

First, change the limits of integration from [8,30] to [-1,1]

by previous relations as follows

$$\int_{8}^{30} f(t)dt = \frac{30-8}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{30-8}{2}x + \frac{30+8}{2}\right)dx = 11\int_{-1}^{1} f\left(11x+19\right)dx$$

Next, get weighting factors and function argument values from Table 1

for the two point rule,

$$c_1 = 1.000000000$$

$$x_1 = -0.577350269$$

$$c_2 = 1.000000000$$

$$x_2 = 0.577350269$$

Now we can use the Gauss Quadrature formula

$$11\int_{-1}^{1} f(11x+19)\,dx \approx 11c_1 f(11x_1+19) + 11c_2 f(11x_2+19)$$

$$= 11 f(11(-0.5773503)+19) + 11 f(11(0.5773503)+19)$$

$$= 11 f(12.64915) + 11 f(25.35085)$$

$$= 11(296.8317) + 11(708.4811)$$

$$= 11058.44\ m$$

since

$$f(12.64915) = 2000\,ln\left[\frac{140000}{140000 - 2100(12.64915)}\right] - 9.8(12.64915)$$

$$= 296.8317$$

$$f(25.35085) = 2000\,ln\left[\frac{140000}{140000 - 2100(25.35085)}\right] - 9.8(25.35085)$$

$$= 708.4811$$

b) The true error, E_t , is

$$E_t = True\ Value - Approximate\ Value = 11061.34 - 11058.44 = 2.9000\ m$$

c) The absolute relative true error, $|\in_t|$, is (Exact value = 11061.34m)

$$|\in_t| = \left|\frac{11061.34 - 11058.44}{11061.34}\right| \times 100\% = 0.0262\%$$