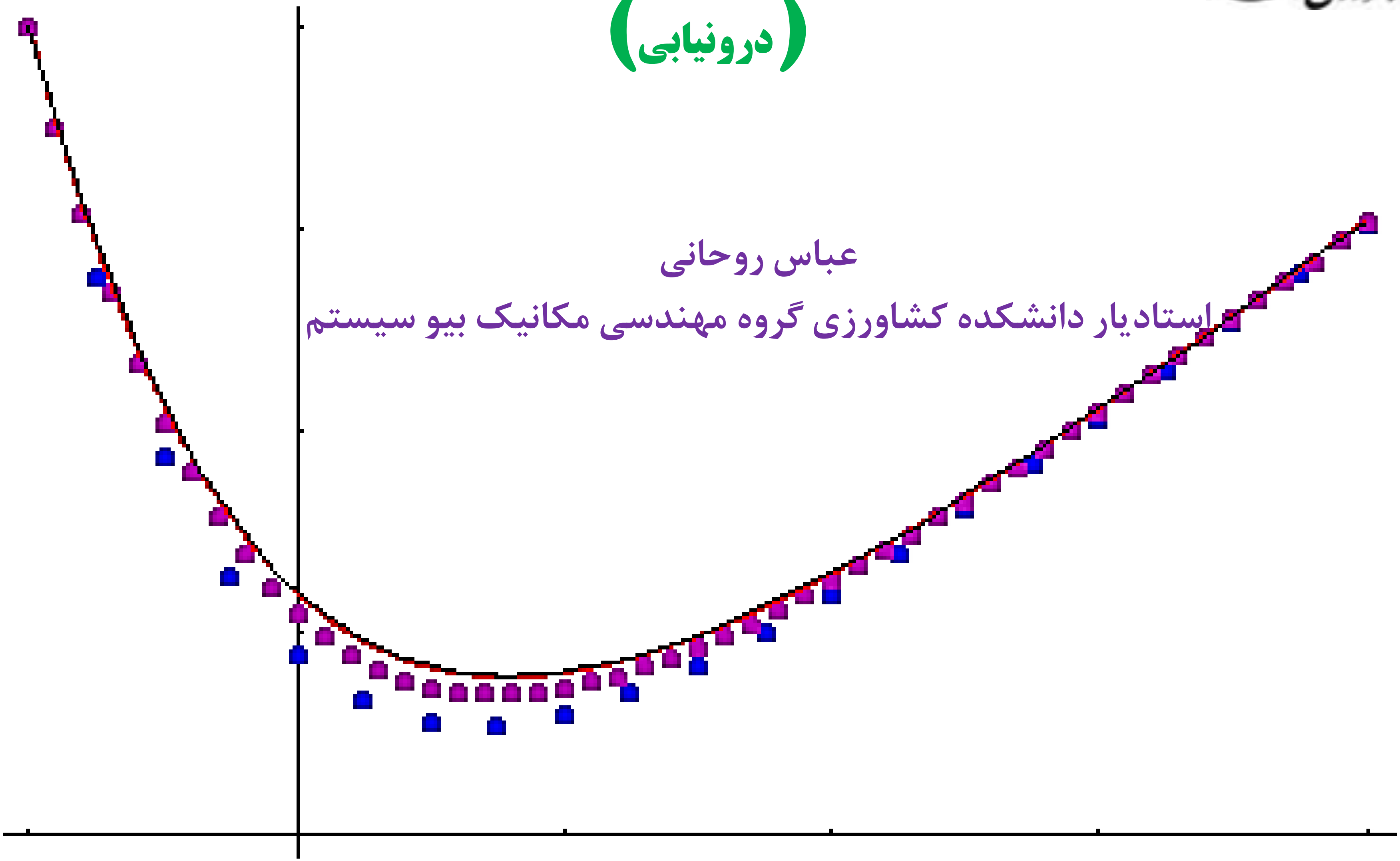
محاسبات عددی

(درونیابی)

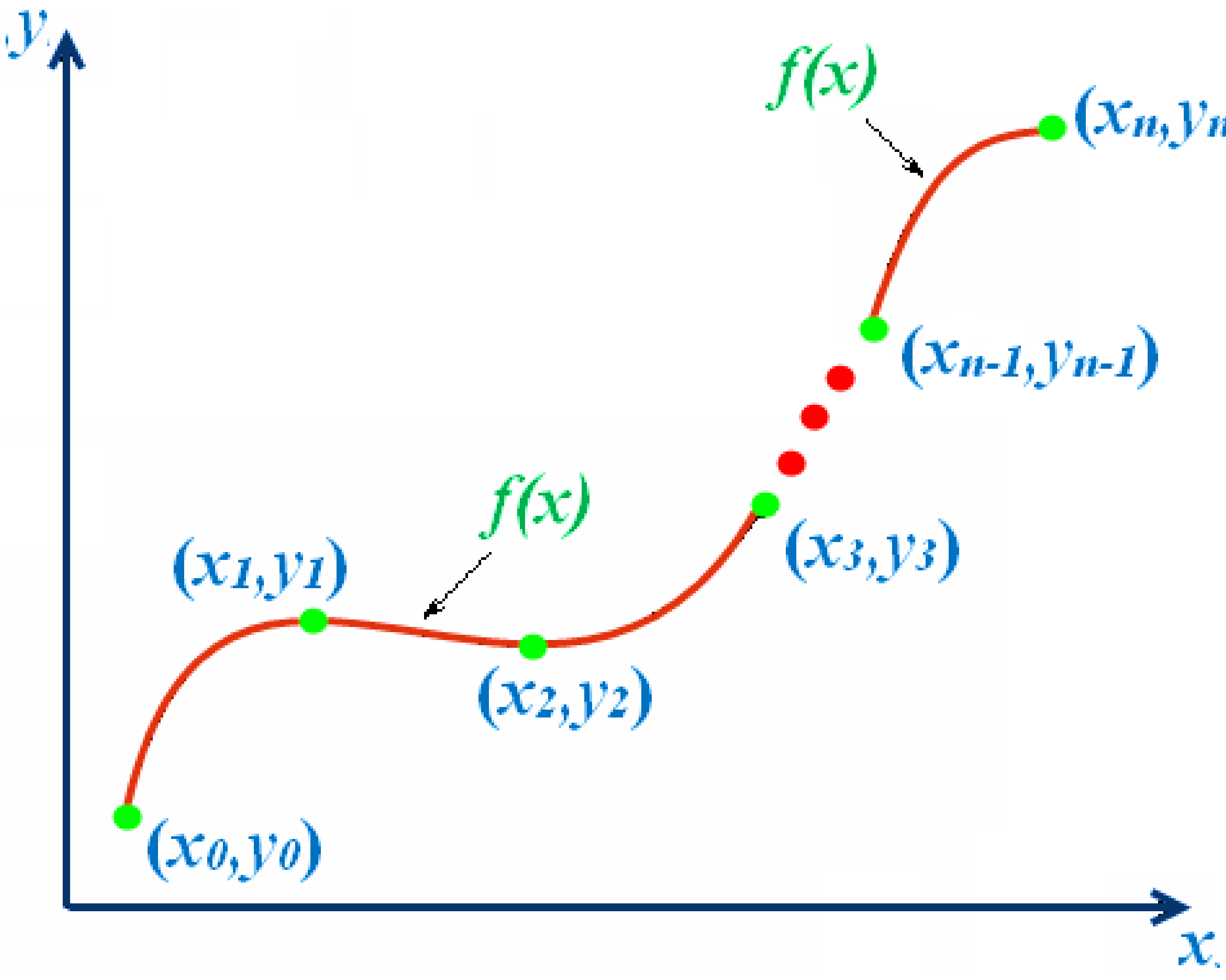


عباس روحانی

استادیار دانشکده کشاورزی گروه مهندسی مکانیک بیو سیستم

دانشگاه فردوسی مشهد

Given (x_0,y_0), (x_1,y_1), …… (x_n,y_n), find the value of ‘y’ at a value of ‘x’ that is not given.



هر گاه مقادیر تابع $f(x)$ در نقاط $x_0,x_1,\dots,x_n$ به صورت $f_0, f_1, \dots, f_n$ معلوم باشد،

x_i	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$f(x_i)=f_i$	f_0	f_1	f_2	$\dots$	f_n

درونیابی یعنی تخمین مقدار $f(x)$ وقتی $x\in(x_0,x_n)$ و $i=1,\dots,n-1$, $x\neq x_i$,

برونیابی یعنی تخمین مقدار $f(x)$ وقتی $x\notin[x_0 , x_n]$

تعریف: تابعی مانند f که مقادیر آن در بعضی نقاط مشخص است و توسط جدولی بیان شده است، یک تابع جدولی نامیده می شود.

درونیابی

فرض کنید تابع f با جدول داده شده است، به طوری که برای $i \neq j$ داریم: $x \neq x_i$

برای تخمین $f(x)$ که $x \in (x_0, x_n)$ برای $x \neq x_i,\ i=1,\ldots,n-1$
یک چند جمله ای مانند $P(x)$ پیدا کنیم که مقدار آن در x_i همان f_i باشد.

$$\boxed{P(x_i) = f_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n}$$

به جای $f(x)$ در فاصله $[x_0, x_n]$ با $P(x)$ کار می کنیم.

قضیه: فقط یک چند جمله ای P(x)، حداکثر از درجه **n**، وجود دارد که در شرط زیر صدق کند.

$$\boxed{P(x_i) = f_i, \qquad i = 0, 1, \dots, n}$$

تعریف: چند جمله ای P(x) که در شرط بالا صدق کند، چند جمله ای درونیاب f نامیده می شود.

چند جمله ای لاگرانژ

در این روش فرض می کنیم $L_0(x)$, $L_1(x)$,…, $L_n(x)$ هر یک، یک چند جمله ای درجه n باشد، داریم:

$$P(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + \cdots + L_n(x)f_n$$

$$L_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}\ , j=0,1,2,\ldots$$

$$L_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}, \; j=0,1,2,\ldots$$

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

بنابراین

$$\boxed{P(x_i) = f_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n}$$

تعریف: چند جمله ای $L_j(x)$ چند جمله ای لاگرانژ نامیده می شود، که یک چند جمله ای از درجه n می باشد.

چند جمله ای P(x) را که مربوط به تابع جدولی زیر است، به دست آورید.

x_i	-1	0	1
f_i	1	1	3

در این مثال داریم: n=2

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x^2-x}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = -(x^2-1)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{x^2+x}{2}$$

$$P(x) = L_0(x) f_0 \quad + L_1(x) f_1 \quad + L_2(x) f_2$$

$$= L_0(x) \times 1 + L_1(x) \times 1 + L_2(x) \times 3$$

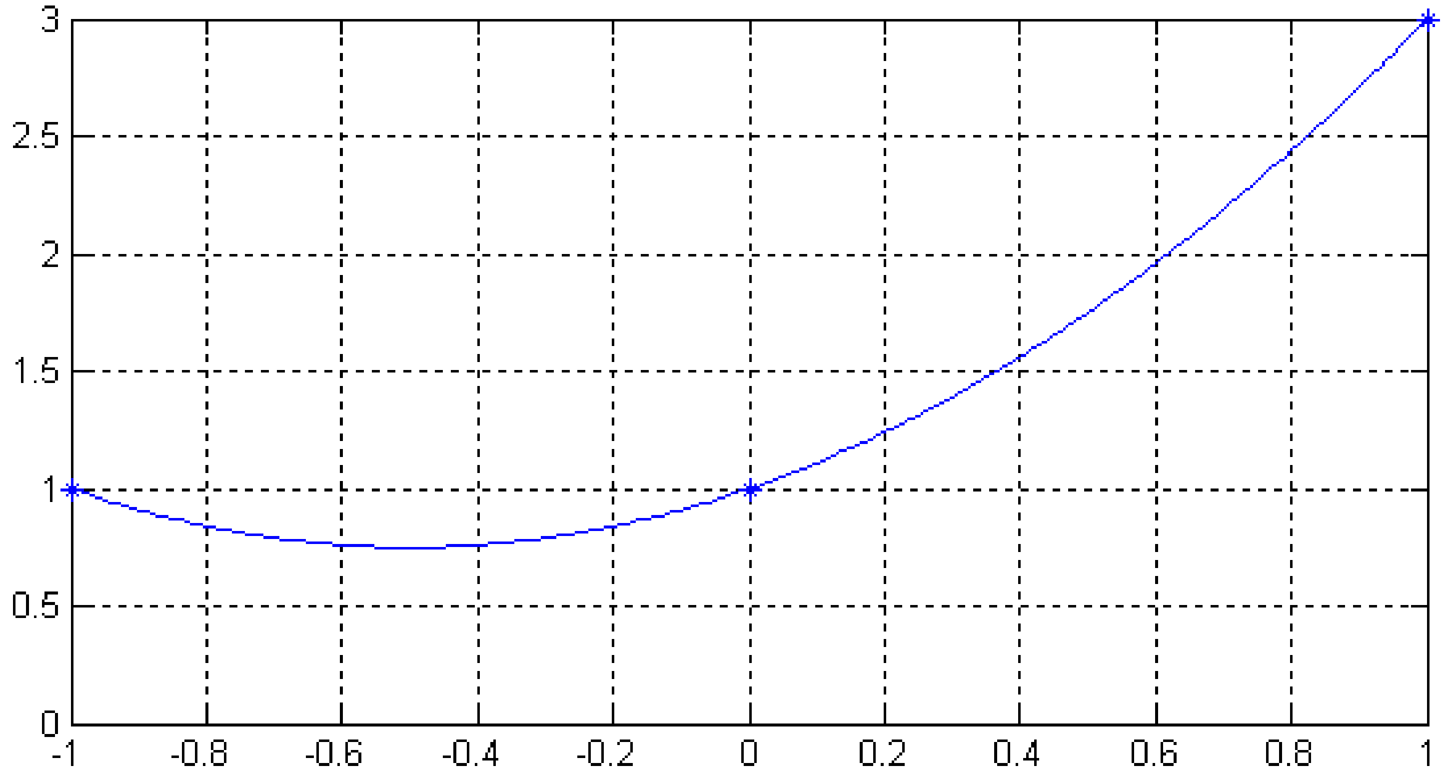
$$= \frac{x^2 - x}{2} - \left(x^2 - 1\right) + \frac{3}{2}(x^2 + x)$$

$$\boxed{P(x) = x^2 + x + 1}$$

$$P(x_0) = P(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1 = f_0$$

$$P(x_2) = P(1) = (1)^2 + (1) + 1 = 3 = f_2$$

$$P(0.5) \cong P(0.5) = (0.5)^2 + (0.5) + 1 = 1.75$$




```
x=[-1 0 1];
y=[1 1 3];
p=polyfit(x,y,2);

P=[1 1 1]
```

```
yp=polyval(p,-1:0.01:1);
plot(x,y,'*')
ylim([0 3])
hold on
grid on
plot(-1:0.01:1,yp);
```

معایب روش لاگرانژ

۱- محاسبات برای تعیین چند جمله ای درونیاب زیاد است.

۲- درجه چند جمله ای درونیاب، تنها بعد از اتمام محاسبات تعیین می شود.

۳. با اضافه کردن یک یا چند نقطه به نقاط جدولی، کلیه عملیات را بایستی مجددا انجام داد.

چند جمله ای درونیاب بر حسب تفاضلات تقسیم شده نیوتن

تعریف: فرض کنید $x_0, x_1, \ldots, x_n$ نقاط دو به دو متمایز و $f_0, f_1, \ldots, f_n$ مقادیر تابع f در این نقاط باشند.

تفاضلات تقسیم شده مرتبه اول بین x_i و x_{i+1} را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} = \frac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} \qquad f[x_1, x_2] = \frac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2}$$

تفاضلات تقسیم شده مرتبه دوم بین x_i، x_{i+1} و x_{i+2} را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_i - x_{i+2}}$$

مشابه بالا می توان تفاضلات تقسیم شده از مرتبه بالاتر را تعریف کرد. اما تفاضلات تقسیم شده از مرتبه های مختلف را بدون نوشتن فرمولها و بر اساس تفاضلات تقسیم شده مرتبه پایین تر نوشت.

جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را به دست آورید

x_i	-1	0	1
f_i	1	1	3

		تفاضلات مرتبه	
xi	fi	اول	دوم
-1	1		
		$\frac{1-1}{-1-0}=0$	
0	1		$\frac{0-2}{-1-1}=1$
		$\frac{1-3}{0-1}=2$	
1	3		

جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را به دست آورید

x_i	-1	0	1	2	3
f_i	-1	1	1	5	19

تفاضلات مرتبه

xi	fi	اول	دوم	سوم	چهارم
-1	-1	$\frac{-1-1}{-1-0}=2$	$\frac{2-0}{-1-1}=-1$	$\frac{-1-2}{-1-2}=1$	$\frac{1-1}{-1-3}=0$
0	1	$\frac{1-1}{0-1}=0$	$\frac{0-4}{0-2}=2$	$\frac{2-5}{0-3}=1$	
1	1	$\frac{1-5}{1-2}=4$	$\frac{4-14}{1-3}=5$		
2	5	$\frac{5-19}{2-3}=14$			
3	19				

فرمول چند جمله ای درونیاب بر حسب تفاضلات تقسیم شده نیوتن

چند جمله ای درونیاب f در نقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ عبارتست از

$$P(x) = f_0 + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

تفاضلات مرتبه iام بین نقاط $x_0, x_1, \dots, x_i$:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_i] = \frac{f[x_0, \dots, x_{i-1}] - f[x_1, \dots, x_i]}{x_0 - x_i}$$

چند جمله ای درونیاب تابع جدولی زیر را به روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن به دست آورید:

x_i	0	1	3	6
f_i	1	-6	4	169

			تفاضلات مرتبه		
i	xi	fi	اول	دوم	سوم
0	0	$\boxed{1}$			
			$\boxed{-7}$		
1	1	-6		$\boxed{4}$	
			5		$\boxed{1}$
2	3	4		10	
			55		
3	6	169			

چند جمله ای درونیاب

$$P(x) = f_0 + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3]$$

$$\boxed{P(x) = 1 - 7x + 4(x-0)(x-1) + 1(x-0)(x-1)(x-3) = x^3 - 8x + 1}$$

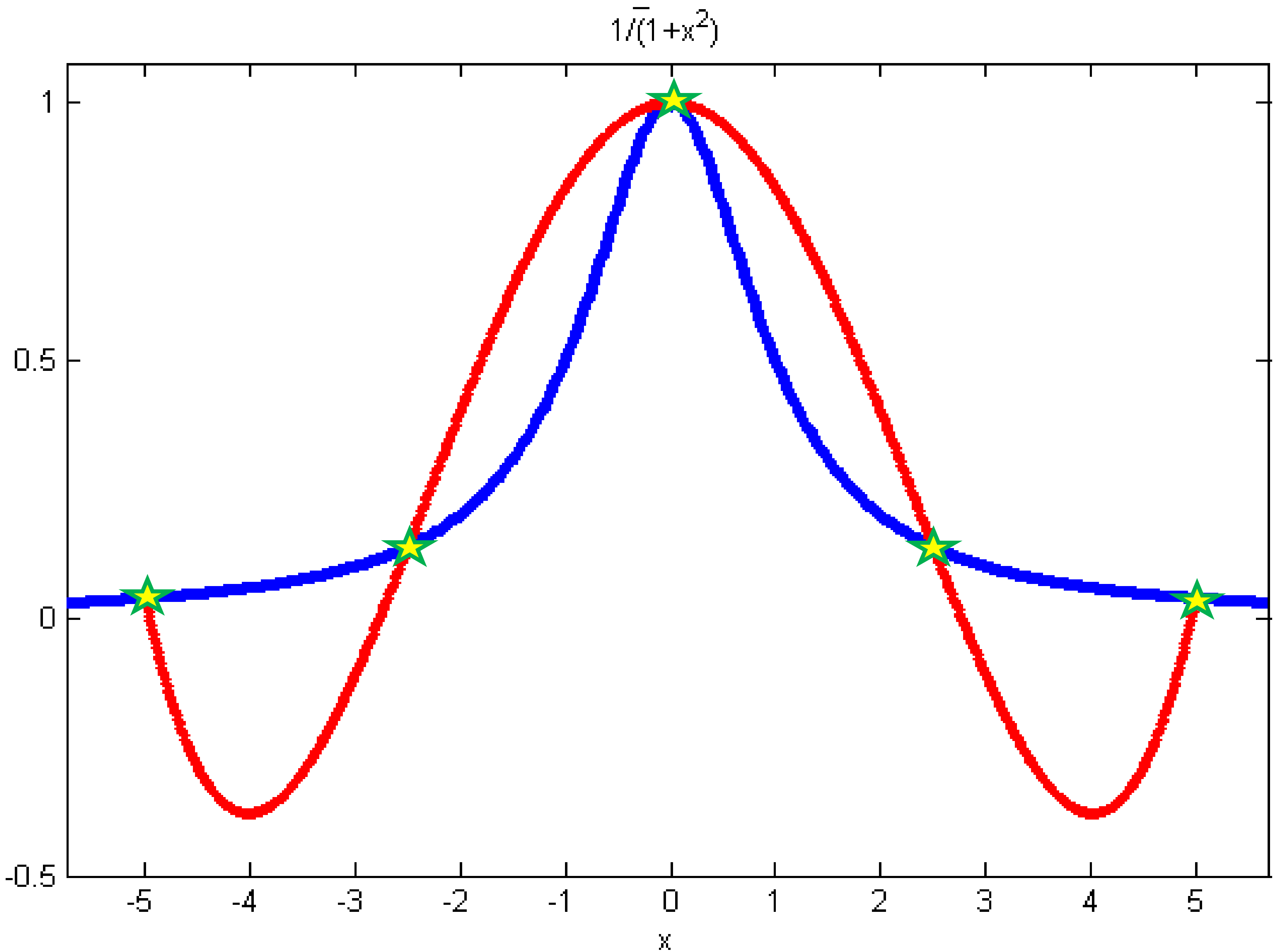
فرض کنید $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ ، به روش نیوتن چند جمله ای از درجه حداکثر چهار را به دست آورید که تابع f را در نقاط متساوی الفاصله زیر درونیابی کند

$$x_i=\frac{10i}{4}-5\ , \qquad i=0,1,2,3,4$$

نقاط درونیابی عبارتند از:

$$x_0=-5, \qquad x_1=-\frac{5}{2}, \qquad x_2=0, \qquad x_3=\frac{5}{2}, \qquad x_4=5$$

```
>> ezplot('1/(1+x^2)')
>> x=[-5 -5/2 0 5/2 5]
x =   -5.0000    -2.5000         0    2.5000    5.0000
>> y=1./(1+x.^2)
y =     0.0385    0.1379    1.0000    0.1379    0.0385
>> hold on
>> plot(x,y,'*')
>> p=polyfit(x,y,4)
p =    0.0053   -0.0000   -0.1711    0.0000    1.0000
>> w=polyval(p,-5:0.01:5);
>> hold on
>> plot(-5:0.01:5,w,'.r')
```



1/(1+x^2)
1
0.5
0
-0.5
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
x

تفاضلات متناهی و درونیابی یک تابع هرگاه نقاط درونیابی متساوی الفاصله باشند

روشهای لاگرانژ و تفاضلات تقسیم شده نیوتن در حالت کلی برای نقاط $x_0,x_1,\dots,x_i$ چه متساوی الفاصله باشند، چه نباشند، چند جمله ای درونیاب را به دست می دهند.

هر گاه فاصله $[a, b]$ را به N زیر فاصله به صورت $[x_i, x_{i+1}]$ هر کدام به طول h تقسیم کنیم، داریم:

$$x = a(h)b, \qquad h = \frac{b-a}{N}$$

نقاط $x=1(0.1)2$ عبارتند از:

$x_0=1, \quad x_1=1.1, \quad x_2=1.2, \ldots, x_{10}=2$

نقاط $x=a(h)b$ عبارتند از:

$$x_i = a + ih \quad , \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, N$$

$$x_{i+1} - x_i = h \quad , \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

هرگاه $a=x_0$ باشد داریم:

$$\boxed{x_i = x_0 + ih \quad , \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, N}$$

در حالتی که نقاط x_i متساوی الفاصله هستند، یک تبدیل خطی به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$s(x) = s = \frac{x - x_0}{h} \quad \Rightarrow \quad x(s) = x = x_0 + \mathbf{sh}$$

بنابراین برای تبدیل خطی فوق خواهیم داشت:

$$f(x) = f(x_0 + sh) = f_s$$

یک چند جمله ای بر حسب **x** را به یک چند جمله ای بر حسب **s** تبدیل می کند.

تعریف عملگر تفاضل پیشرو Δ :

$$\Delta^i f_s = \begin{cases} f_s & i = 0 \\ \Delta^{i-1} f_{s+1} - \Delta^{i-1} f_s & i > 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\Delta f_s = \Delta^0 f_{s+1} - \Delta^0 f_s = f_{s+1} - f_s}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta^2 f_s &= \Delta f_{s+1} - \Delta f_s = (\Delta^0 f_{s+2} - \Delta^0 f_{s+1}) - (f_{s+1} - f_s) \\ &= f_{s+2} - 2 f_{s+1} + f_s \end{aligned}}$$

هرگاه نقاط x_i متساوی الفاصله باشند، می توان جدول تفاضلات را که جدول تفاضلات متناهی هم نامیده می شود، تشکیل داد:

برای $n=3$ جدول تفاضلات به صورت زیر است:

x_i	f_s	Δ	Δ^2	Δ^3
x_0	f_0			
		Δf_0		
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$	
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$	
		Δf_2		
x_3	f_3			

تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را حساب کنید:

x_i	-1	0	1	2
f_i	0	-1	2	9

x_i	f_i	Δ	Δ^2	Δ^3
-1	0			
		$-1-0=-1$		
0	-1		$3+1=4$	
		$2+1=3$		$4-4=0$
1	2		$7-3=4$	
		$9-2=7$		
2	9			

فرمول چند جمله ای درونیاب برحسب تفاضلات پیشرو

(فرمول تفاضل پیشرو نیوتن)

هر گاه x_i نقاط متساوی الفاصله باشند و $x=x_0+sh$، در این صورت چند جمله ای درونیاب f بر حسب تفاضلات پیشرو به صورت زیر می باشد:

$$P(x) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \cdots + \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

(فرمول تفاضل پیشرو نیوتن)

$$P(x) = f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 f_0 + \binom{s}{3}\Delta^3 f_0 + \cdots + \binom{s}{n}\Delta^n f_0$$

$$\frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-i+1)}{i!} = \binom{s}{i}$$

فرمول چند جمله ای درونیاب مربوط به تابع جدولی بر حسب تفاضلات پیشرو نیوتن زیر را حساب کنید:

x_i	1	2	3	4
f_i	2	5	10	17

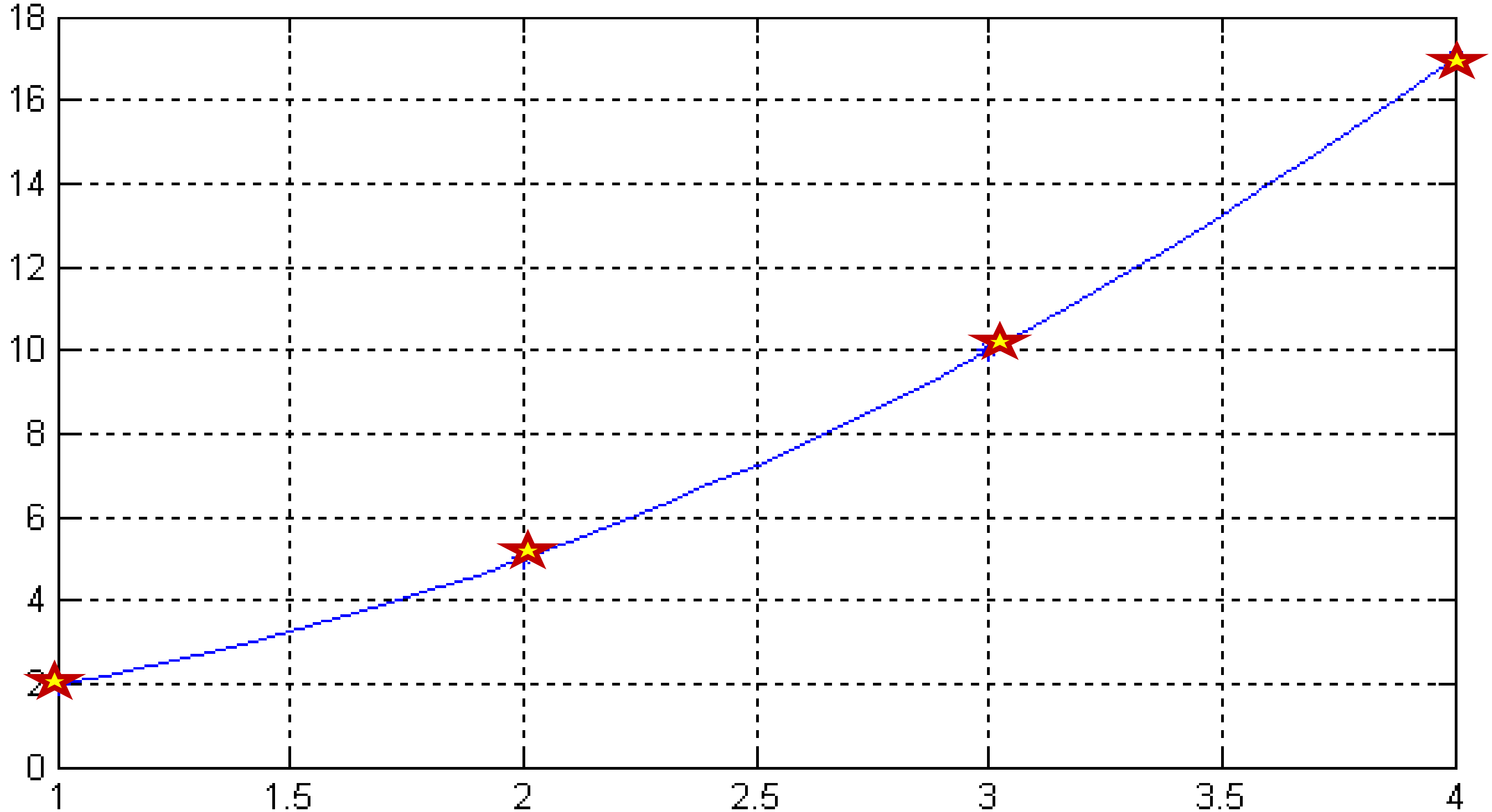
x_i	f_s	Δ	Δ^2	Δ^3
1	$\boxed{\underline{2}}$			
		$\boxed{\underline{3}}$		
2	5		$\boxed{\underline{2}}$	
		5		$\boxed{\underline{0}}$
3	10		2	
		7		
4	17			

$$P(x) = f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 f_0 + \binom{s}{3}\Delta^3 f_0$$

$$= 2 + 3s + \frac{s(s-1)}{2} \times 2 = s^2 + 2s + 2$$

$$\begin{cases} x = x_0 + sh \\ x_0 = 1, \qquad h = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1 + s \Rightarrow s = x - 1$$

$$\boxed{P(x) = (x-1)^2 + 2(x-1) + 2 = x^2 + 1}$$




```
>> x=1:4;
>> y=[2 5 10 17];
>> p=polyfit(x,y,3)
p =    0.0000    1.0000    0.0000    1.0000
>> yp=polyval(p,1:0.1:4);
>> plot(x,y,'*') hold on  grid on
>> plot(1:0.1:4,yp)
```

$$\boxed{P(x) = x^2 + 1}$$

تعریف عملگر تفاضل پسرو ∇ :

$$\nabla^i f_s = \begin{cases} f_s & i = 0 \\ \nabla^{i-1} f_s - \nabla^{i-1} f_{s-1} & i > 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\nabla f_s = \nabla^0 f_s - \nabla^0 f_{s-1} = f_s - f_{s-1}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2 f_s = \nabla f_s - \nabla f_{s-1} = (f_s - f_{s-1}) - (\nabla^0 f_{s-1} - \nabla^0 f_{s-2}) \\ &= f_s - 2f_{s-1} + f_{s-2} \end{aligned}}$$

برای $n=3$ جدول تفاضلات پسرو به صورت زیر است:

x_i	f_s	∇	∇^{2}	∇^{3}
x_0	f_0			
		∇f_1		
x_1	f_1		$\nabla^{0} f_2$	
				$\nabla^{3} f_3$
		∇f_2		
x_2	f_2		$\nabla^{0} f_3$	
		∇f_3		
x_3	f_3			

فرمول چند جمله ای درونیاب برحسب تفاضلات پیسرو

(فرمول تفاضل پسرو نیوتن)

برای تخمین f(x) وقتی x نزدیک نقاط انتهای جدول است، لازم است که از تفاضلات پسرو که بر حسب نقاط انتهایی جدول بیان می شود استفاده کنیم.

$$P(x) = f_n + s\nabla f_n + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\nabla^3 f_n + \cdots + \frac{s(s+1)(s+2)\ldots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f_n$$

$$\boxed{x = x_n + sh}$$

برای تابع جدولی زیر جدول تفاضلات پسرو نیوتن حساب کنید:

x_i	1	2	3	4
f_i	2	5	10	17

x_i	f_s	∇	∇^2	∇^3
1	2			
		3		
2	5		2	
		5		$\boxed{\underline{0}}$
3	10		$\boxed{2}$	
		$\boxed{7}$		
4	$\boxed{17}$			

$$P(x) = f_3 + s\nabla f_3 + \frac{s(s+1)}{2}\nabla^2 f_3$$

$$= 17 + 7s + \frac{s(s+1)}{2} \times 2 = s^2 + 8s + 17$$

$$\boxed{x = x_n + sh} \Rightarrow x = 4 + s \Rightarrow s = x - 4$$

$$\boxed{P(x) = (x-4)^2 + 8(x-4) + 17 = x^2 + 1}$$

شکل دترمینانی چند جمله ای درونیاب

$$\begin{bmatrix} P(x) & 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ f_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^2 \\ f_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n & 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} = 0$$

هرگاه دترمینان را بر حسب سطر اول بسط دهیم در این صورت یک چند جمله ای حداکثر از درجه n به دست می آید.

چند جمله ای درونیاب تابع جدولی زیر را به کمک روش دترمینان به دست آورید.

x_i	0	2
f_i	1	3

$$\begin{bmatrix} P(x) & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}=0$$

در این مثال n=1

$$\boxed{2P(x)-1(2)+x(1-3)=0}$$

$$P(x)=x+1$$

خطای چند جمله ای درونیاب

هر گاه P(x) چند جمله ای درونیاب f در نقاط دو به دو متمایز $x_0,x_1,\ldots,x_n$ بوده و f دارای مشتق مرتبه n+1 باشد، آنگاه داریم:

$$\boxed{f(x) = P(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)}$$

c عددی نامشخص بوده و $x_0 < c < x_n$

$f^{(k)}(c)$ **مشتق مرتبه kام تابع f**

به دلیل نامشخص بودن c، هر گاه M یک کران بالا برای $f^{(n+1)}(x)$ در فاصله $[x_0 \;\; x_n]$ باشد:

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M, \qquad\qquad x \in [x_0 \;\; , x_n]$$

یک کران بالا برای خطای چند جمله ای درونیاب P(x)

$$\boxed{|f(x) - P(x)| \le |(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)| \frac{M}{(n+1)!}}$$

چند جمله ای درونیاب تابع $f(x)=cos\frac{\pi}{2}x$ را در نقاط $x_0=0$ و $x_1=1$ به دست آورید و کران بالایی برای $|f(x)-P(x)|$ با فرض $x=\frac{1}{2}$ حساب کنید.

x_i	0	1
f_i	1	0

x_i	f_s	∇
0	1	
		$\underline{-1}$
1	$\underline{0}$	

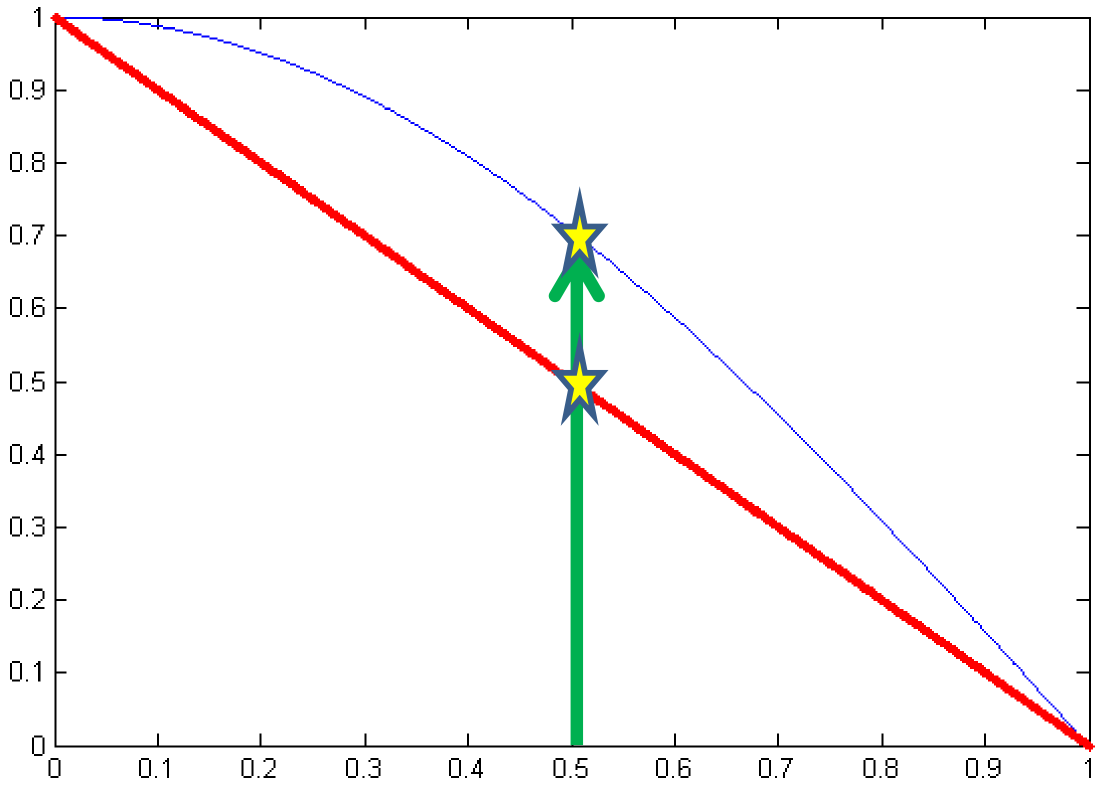
$$P(x)=f_1+s\nabla f_1=0-s$$

$$\boxed{x=x_n+sh} \Rightarrow x=1+s \Rightarrow s=x-1$$

$$P(x)=1-x$$

$$f(x) = \cos\frac{\pi}{2}x \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$P(x) = 1 - x \Rightarrow P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$




```
>> x=0:0.001:1;
>> y=cos(pi/2*x);
>> plot(x,y)
>> hold on
>> plot(x,1-x,'.r')
```

برای تعیین یک کران بالا برای $|f(x)-P(x)|$ باید کران بالایی برای مشتق مرتبه دوم تابع **f** به دست آوریم:

$$f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x \Rightarrow f'(x)=-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x \Rightarrow f''(x)=-\frac{\pi^2}{2}\cos\frac{\pi}{2}x$$

$$|f''(x)|=\left|-\frac{\pi^2}{2}\cos\frac{\pi}{2}x\right|\le\frac{\pi^2}{4}$$

$$|f(x)-P(x)|\le\left|(x-0)(x-1)\times\frac{\pi^2/4}{2!}\right|=\frac{\pi^2}{8}\left|x^2-x\right|$$

$$|f(x)-P(x)| \le \left|(x-0)(x-1)\times\frac{\pi^2/4}{2!}\right| = \frac{\pi^2}{8}\left|x^2-x\right|$$

کران بالا ی خطا $\frac{\pi^2}{8}\left|x^2-x\right|$

$$x=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{8}\left|\frac{1}{2}^2-\frac{1}{2}\right| = \frac{\pi^2}{32} = 0.31(2\mathrm{D})$$

مقدار خطای چند جمله ای درجه یک به عنوان تقریب تابع زیاد است و لذا نمی تواند
تقریب مناسبی برای تابع مورد نظر باشد

برونیابی

هر گاه تابع f در نقاط $x_0,x_1,\ldots,x_n$ مقادیر معلوم $f_0, f_1, \ldots, f_n$ را داشته باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x} < x_0\\ \\ \bar{x} > x_n\end{array}\right\}$$ تخمین تابع f(x) را در $x = \bar{x}$ بشرط آنکه

مقدار خطای چند جمله ای P(x) به عنوان تقریب تابع f(x) زیاد خواهد بود. مگر آنکه نقطه مورد نظر نزدیک به فاصله درونیابی باشند.

با استفاده از تفاضلات تقسیم شده نیوتن، جمله ای درونیاب گذرنده از دو نقطه (x_{k+1},y_{k+1}) و (x_k,y_{k+1}):

$$y = y_k + (x - x_k) f[x_k, x_{k+1}] = y_k + \frac{(x - x_k)}{(x_{k+1} - x_k)}(y_{k+1} - y_k)$$

$$\bar{x} < x_0 \xrightarrow{k=0} \bar{y} = y_0 + \frac{(\bar{x} - x_0)}{(x_1 - x_0)}(y_1 - y_0)$$

$$\bar{x} > x_n \xrightarrow{k=n-1} \bar{y} = y_{n-1} + \frac{(\bar{x} - x_{n-1})}{(x_n - x_{n-1})}(y_n - y_{n-1})$$

تابع جدولی زیر را در نظر بگیرید:

x_i	-1	0	1	2
f_i	0	-1	2	9

$f(-1.5) = ?$ $f(2.2) = ?$

$$\bar{x} = -1.5 \Longrightarrow \bar{y} = 0 + \frac{(-1.5 + 1)}{(0 + 1)}(-1 - 0) = 0.5$$

$$\boxed{f(-1.5) \cong 0.5}$$

$$\bar{x} = 2.2 \Longrightarrow \bar{y} = 2 + \frac{(2.2 - 1)}{(2 - 1)}(9 - 2) = 10.4$$

$$\boxed{f(2.2) \cong 10.4}$$

Lagrangian Interpolation

Lagrangian interpolating polynomial is given by

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

where 'n' in $f_n(x)$ stands for the n^{th} order polynomial that approximates the function $y = f(x)$ given at $(n+1)$ data points as $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots\ldots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$, and

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$L_i(x)$ is a weighting function that includes a product of $(n-1)$ terms with terms of $j = i$ omitted.

Example

The upward velocity of a rocket is given as a function of time in Table 1. Find the velocity at t=16 seconds using the Lagrangian method for linear interpolation.

Table Velocity as a function of time

t (s)	$v(t)$ (m/s)
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67

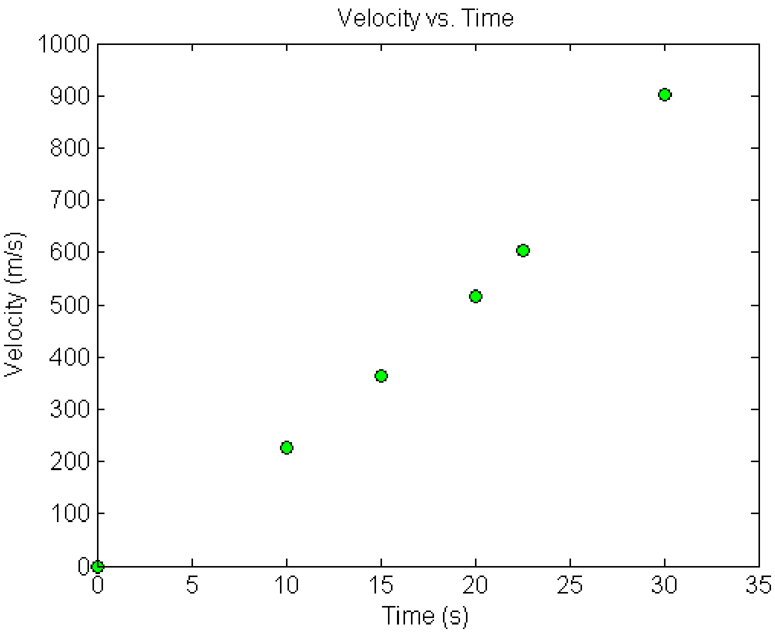


Figure. Velocity vs. time data for the rocket example

Linear Interpolation

$$v(t) = \sum_{i=0}^{1} L_i(t) v(t_i)$$

$$= L_0(t) v(t_0) + L_1(t) v(t_1)$$

$$t_0 = 15, v(t_0) = 362.78$$

$$t_1 = 20, v(t_1) = 517.35$$

(s)	(m/s)
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67

Linear Interpolation (contd)

$$L_0(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^{1} \frac{t - t_j}{t_0 - t_j} = \frac{t - t_1}{t_0 - t_1}$$

$$L_1(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^{1} \frac{t - t_j}{t_1 - t_j} = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}$$

$$v(t) = \frac{t - t_1}{t_0 - t_1} v(t_0) + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} v(t_1) = \frac{t - 20}{15 - 20}(362.78) + \frac{t - 15}{20 - 15}(517.35)$$

$$v(16) = \frac{16 - 20}{15 - 20}(362.78) + \frac{16 - 15}{20 - 15}(517.35)$$

$$= 0.8(362.78) + 0.2(517.35)$$

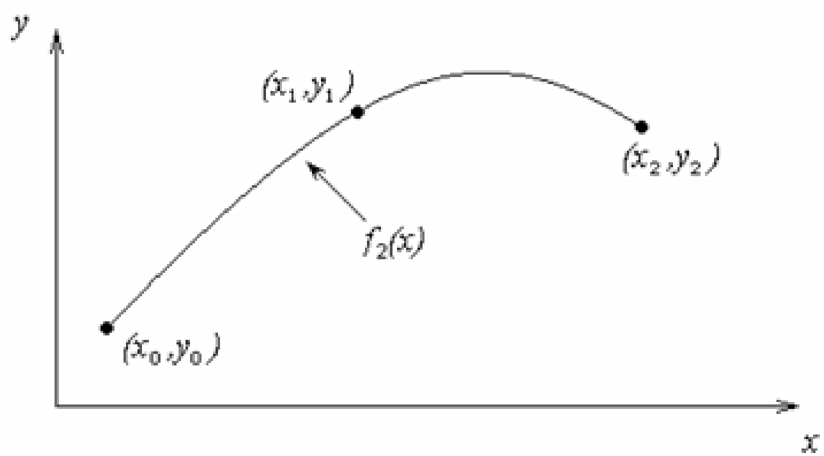
$$= 393.7 \text{ m/s.}$$

Quadratic Interpolation

For the second order polynomial interpolation (also called quadratic interpolation), we choose the velocity given by

$$v(t) = \sum_{i=0}^{2} L_i(t)v(t_i)$$

$$= L_0(t)v(t_0) + L_1(t)v(t_1) + L_2(t)v(t_2)$$



edu

Quadratic Interpolation (contd)

$$t_0 = 10,\ v(t_0) = 227.04$$

$$t_1 = 15,\ v(t_1) = 362.78$$

$$t_2 = 20,\ v(t_2) = 517.35$$

$$L_0(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{2} \frac{t - t_j}{t_0 - t_j} = \left(\frac{t - t_1}{t_0 - t_1}\right)\left(\frac{t - t_2}{t_0 - t_2}\right)$$

$$L_1(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{2} \frac{t - t_j}{t_1 - t_j} = \left(\frac{t - t_0}{t_1 - t_0}\right)\left(\frac{t - t_2}{t_1 - t_2}\right)$$

$$L_2(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 2}}^{2} \frac{t - t_j}{t_2 - t_j} = \left(\frac{t - t_0}{t_2 - t_0}\right)\left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right)$$

(s)	(m/s)
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67

Quadratic Interpolation (contd)

$$v(t)=\left(\frac{t-t_1}{t_0-t_1}\right)\left(\frac{t-t_2}{t_0-t_2}\right)v(t_0)+\left(\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right)\left(\frac{t-t_2}{t_1-t_2}\right)v(t_1)+\left(\frac{t-t_0}{t_2-t_0}\right)\left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right)v(t_2)$$

$$v(16)=\left(\frac{16-15}{10-15}\right)\left(\frac{16-20}{10-20}\right)(227.04)+\left(\frac{16-10}{15-10}\right)\left(\frac{16-20}{15-20}\right)(362.78)+\left(\frac{16-10}{20-10}\right)\left(\frac{16-15}{20-15}\right)(517.35)$$

$$=(-0.08)(227.04)+(0.96)(362.78)+(0.12)(527.35)$$

$$=392.19 \text{ m/s}$$

The absolute relative approximate error $|\in_a|$ obtained between the results from the first and second order polynomial is

$$|\in_a|=\left|\frac{392.19-393.70}{392.19}\right|\times 100$$

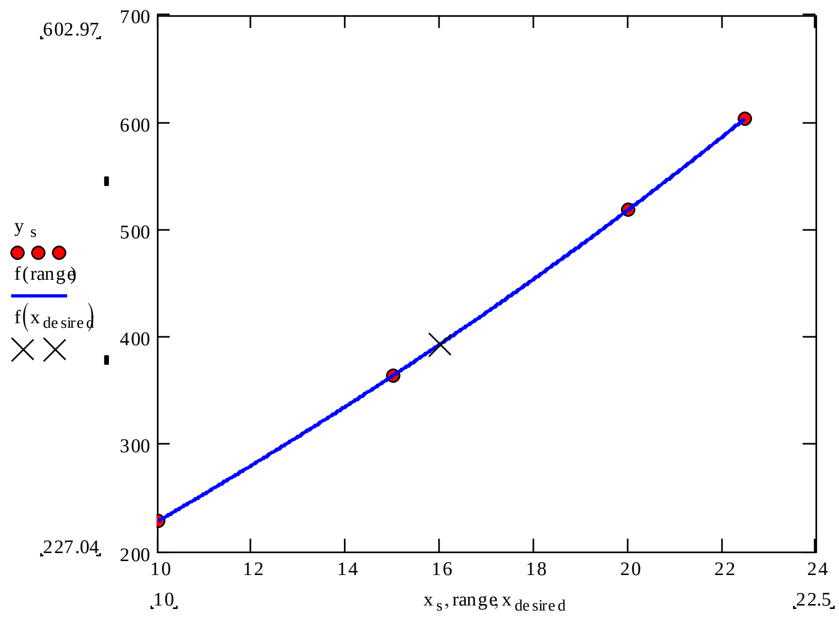
$$=0.38410\%$$

Cubic Interpolation

For the third order polynomial (also called cubic interpolation), we choose the velocity given by

$$v(t) = \sum_{i=0}^{3} L_i(t)v(t_i)$$

$$= L_0(t)v(t_0) + L_1(t)v(t_1) + L_2(t)v(t_2) + L_3(t)v(t_3)$$



Cubic Interpolation (contd)

$$t_o = 10, \; v(t_o) = 227.04 \qquad t_1 = 15, \; v(t_1) = 362.78$$

$$t_2 = 20, \; v(t_2) = 517.35 \qquad t_3 = 22.5, \; v(t_3) = 602.97$$

$$L_0(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^{3} \frac{t - t_j}{t_0 - t_j} = \left(\frac{t - t_1}{t_0 - t_1}\right)\left(\frac{t - t_2}{t_0 - t_2}\right)\left(\frac{t - t_3}{t_0 - t_3}\right);$$

$$L_1(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^{3} \frac{t - t_j}{t_1 - t_j} = \left(\frac{t - t_0}{t_1 - t_0}\right)\left(\frac{t - t_2}{t_1 - t_2}\right)\left(\frac{t - t_3}{t_1 - t_3}\right)$$

$$L_2(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 2}}^{3} \frac{t - t_j}{t_2 - t_j} = \left(\frac{t - t_0}{t_2 - t_0}\right)\left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right)\left(\frac{t - t_3}{t_2 - t_3}\right);$$

$$L_3(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 3}}^{3} \frac{t - t_j}{t_3 - t_j} = \left(\frac{t - t_0}{t_3 - t_0}\right)\left(\frac{t - t_1}{t_3 - t_1}\right)\left(\frac{t - t_2}{t_3 - t_2}\right)$$

(s)	(m/s)
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67

Cubic Interpolation (contd)

$$v(t)=\left(\frac{t-t_1}{t_0-t_1}\right)\left(\frac{t-t_2}{t_0-t_2}\right)\left(\frac{t-t_3}{t_0-t_3}\right)v(t_1)+\left(\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right)\left(\frac{t-t_2}{t_1-t_2}\right)\left(\frac{t-t_3}{t_1-t_3}\right)v(t_2)$$

$$+\left(\frac{t-t_0}{t_2-t_0}\right)\left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right)\left(\frac{t-t_3}{t_2-t_3}\right)v(t_2)+\left(\frac{t-t_1}{t_3-t_1}\right)\left(\frac{t-t_1}{t_3-t_1}\right)\left(\frac{t-t_2}{t_3-t_2}\right)v(t_3)$$

$$v(16)=\left(\frac{16-15}{10-15}\right)\left(\frac{16-20}{10-20}\right)\left(\frac{16-22.5}{10-22.5}\right)(227.04)+\left(\frac{16-10}{15-10}\right)\left(\frac{16-20}{15-20}\right)\left(\frac{16-22.5}{15-22.5}\right)(362.78)$$

$$+\left(\frac{16-10}{20-10}\right)\left(\frac{16-15}{20-15}\right)\left(\frac{16-22.5}{20-22.5}\right)(517.35)+\left(\frac{16-10}{22.5-10}\right)\left(\frac{16-15}{22.5-15}\right)\left(\frac{16-20}{22.5-20}\right)(602.97)$$

$$=(-0.0416)(227.04)+(0.832)(362.78)+(0.312)(517.35)+(-0.1024)(602.97)$$

$$=392.06\,\text{m/s}$$

The absolute relative approximate error $|\in_a|$ obtained between the results from the first and second order polynomial is

$$|\in_a|=\left|\frac{392.06-392.19}{392.06}\right|\times 100$$

$$=0.033269\%$$

Comparison Table

Order of Polynomial	**1**	**2**	**3**
v(t=16) m/s	393.69	392.19	392.06
Absolute Relative Approximate Error	--------	0.38410%	0.033269%