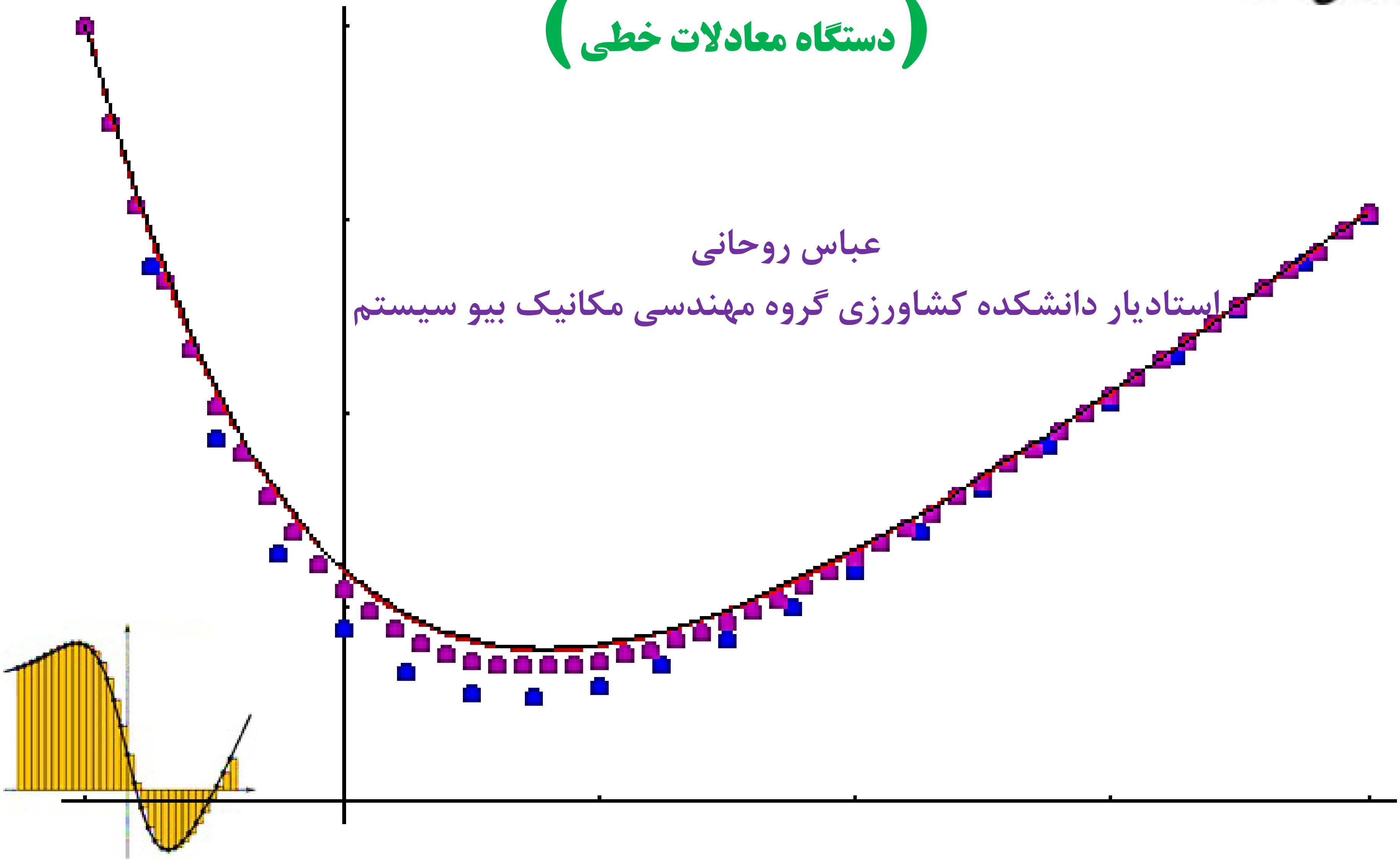
دانشگاه فردوسی مشهد

محاسبات عددی

(دستگاه معادلات خطی)



عباس روحانی

استادیار دانشکده کشاورزی گروه مهندسی مکانیک بیو سیستم

دستگاههای معادلات خطی n معادله n مجهولی به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

A ماتریسی مربع مرتبه n با مولفه‌های معلوم،

$\mathbf{b}$ برداری (ستونی) با n مولفه معلوم

و $\mathbf{x}$ یک بردار (ستونی) با n مولفه مجهول

درصدد یافتن یک چند جمله‌ای به صورت $P(x) = a + bx + cx^{۲}$ هستیم که در روابط زیر صدق می‌کند :

$$P(۱) = ۰ \qquad , \qquad P(۲) = -۱ \qquad , \qquad P(۳) = ۲$$

$$P(۱) = ۰ \Longrightarrow a + b + c = ۰$$

$$P(۲) = -۱ \Longrightarrow a + ۲b + ۴c = -۱$$

$$P(۳) = ۲ \Longrightarrow a + ۳b + ۹c = ۲$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۹ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

جواب دستگاه فوق $a = ۵, \quad b = -۷, \quad c = ۲$

```
>> A=[1 1 1;1 2 4;1 3 9]
A =

     1     1     1
     1     2     4
     1     3     9

>> b=[0 -1 2]'
b =

     0
    -1
     2

>> inv(A)*b
ans =

     5
    -7
     2
```

تعریف منظور از جواب یک دستگاه از معادلات به دست آوردن بردار x است که مولفه‌های آن در تمام معادلات دستگاه صدق می‌کنند.

روشهای به دست آوردن جواب یک دستگاه از معادلات

الف.روشهای مستقیم

روشهایی هستند که پس از انجام چند مرحله مشخص به جواب می‌رسیم که این جواب، بدون در نظرگرفتن خطای گرد کردن، جواب دقیق دستگاه است.

ب. روشهای تکراری

تنها به یک تقریب از جواب می‌رسیم.

روشهای مستقیم

روشهای مستقیم حل دستگاههای معادلات خطی

$$Ax = b$$

فرض می‌کنیم که A نامنفرد است و اگر A ماتریسی منفرد باشد
در طی عملیات منفرد بودن آن مشخص خواهد شد،

در روشهای مستقیم سعی بر این است که دستگاه داده شده از معادلات را به کمک
عملیات سطری مقدماتی
به یک دستگاه معادل ساده‌تر تبدیل کنیم.

عملیات سطری مقدماتی عبارتند از :

۱ـ تعویض دو سطر (یا دو معادله)

۲ـ ضرب یک سطر (یا یک معادله) در عددی مخالف صفر

۳ـ ضرب یک سطر (معادله) در عددی مخالف صفر و جمع نمودن آن با سطری دیگر.

دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 + 0x_3 = 7 \\ 2{,}5x_2 + 5x_3 = 2{,}5 \\ 6{,}2x_3 = 6{,}2 \end{cases}$$

دستگاه فوق به شکل ماتریسی عبارتست از :

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2{,}5 & 5 \\ 0 & 0 & 6{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2{,}5 \\ 6{,}2 \end{bmatrix}$$

تعریف دستگاهی مانند دستگاه معادلات مثال که ماتریس ضرایب آن ماتریسی بالا مثلثی است، دستگاه بالا مثلثی نامیده می‌شود.

برای به دست آوردن جواب دستگاه از آخرین معادله دستگاه داریم :

$$۶/۲x_۳ = ۶/۲ \Longrightarrow x_۳ = ۱$$

با جایگزین نمودن این مقدار در معادله دوم خواهیم داشت :

$$۲/۵x_۲ + ۵(۱) = ۲/۵ \Longrightarrow x_۲ = -۱$$

نهایتاً، با قرار دادن مقادیر $x_۳$ و $x_۲$ در معادله اول خواهیم داشت :

$$۱۰x_۱ - ۷(-۱) + ۰(۱) = ۷ \Longrightarrow x_۱ = ۰$$

تعریف روش به کار رفته در مثال قبل که برای دستگاههای بالا مثلثی به منظور تعیین جواب مورد استفاده قرار می‌گیرد، جایگذاری پسرو(یا جایگذاری از معادله پائینی) نامیده می‌شود.

الگوریتم حل دستگاههای بالا مثلثی :

فرض کنید یک دستگاه بالا مثلثی به صورت زیر داشته باشیم :

$$
\begin{aligned}
u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n &= c_1 \\
u_{22}x_2 + \cdots + u_{2n}x_n &= c_2 \\
&\vdots \\
u_{nn}x_n &= c_n
\end{aligned}
$$

در این صورت جواب دستگاه را به صورت زیر به دست می‌آوریم :

۱- قرار دهید

$$x_n = \frac{c_n}{u_{nn}}$$

۲- برای $i = n - ۱, n - ۲, \cdots, ۲, ۱$ قرار دهید :

$$x_i = \frac{۱}{u_{ii}}\left\{c_i - \sum_{j=i+۱}^{n} u_{ij} x_j\right\}$$

روش حذفی گاوس

به کمک عملیات سطری مقدماتی به یک دستگاه بالا مثلثی تبدیل می‌کند.

دستگاه معادلات زیر را به یک دستگاه بالا مثلثی تبدیل نموده و سپس جواب دستگاه
را به دست آورید.

$$10x_1 - 7x_2 = 7$$

$$5x_1 - x_2 + 5x_3 = 6$$

$$-3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4$$

حل: شکل ماتریسی دستگاه فوق به صورت زیر است :

$$\begin{bmatrix} ۱۰ & -۷ & ۰ \\ ۵ & -۱ & ۵ \\ -۳ & ۲ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۶ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

قدم اول. با استفاده از سطر اول (یا معادله اول دستگاه) ضریب $x_۱$ را در دو معادله دیگر صفر می‌کنیم.برای این منظور $\frac{-۵}{۱۰}$ برابر سطر اول را با سطر دوم جمع می‌کنیم، همچنین $-\frac{-۳}{۱۰}$ برابر سطر اول را با سطر سوم جمع می‌کنیم با انجام این دو عمل، خواهیم داشت :

$$\begin{bmatrix} ۱۰ & -۷ & ۰ \\ ۰ & ۲/۵ & ۵ \\ ۰ & -۰/۱ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۲/۵ \\ ۶/۱ \end{bmatrix}$$

قدم دوم. با استفاده از سطر دوم ضریب $x_۲$ را در سطر سوم حذف می‌کنیم. برای این منظور $-\frac{-۰/۱}{۲/۵} = ۰/۰۴$ برابر سطر دوم را با سطر سوم جمع می‌کنیم، با این عمل خواهیم داشت :

$$\begin{bmatrix} ۱۰ & -۷ & ۰ \\ ۰ & ۲/۵ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۶/۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۲/۵ \\ ۶/۲ \end{bmatrix}$$

$$x_۱ = ۰ , x_۲ = -۱ , x_۳ = ۱$$

```
>> A=[10 -7 0;5 -1 5;-3 2 6]
A =
    10    -7     0
     5    -1     5
    -3     2     6
>> b=[7 6 4]'
b =
     7
     6
     4

>> [L U]=lu([A b])
L =
    1.0000         0         0
    0.5000    1.0000         0
   -0.3000   -0.0400    1.0000
U =
   10.0000   -7.0000         0    7.0000
         0    2.5000    5.0000    2.5000
         0         0    6.2000    6.2000
```

تذکر. انجام عملیات مقدماتی سطری بر روی ماتریس افزوده $[A : \mathbf{b}]$ صورت می‌گیرد و نیازی به تکرار دستگاه در هر مرحله نیست.

الگوریتم روش حذفی گاوس

فرض کنید ماتریس افزوده دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ به صورت زیر باشد

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right]$$

مرحله یک. با فرض $a_{11}^{(1)} \neq 0$ سطر اول ماتریس را در $l_{i1} = -\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ ضرب نموده و با سطر iام برای $i = 2, 3, \cdots, n$ جمع می‌کنیم[1]. این عمل دستگاه معادل زیر را نتیجه می‌دهد :

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & \vdots & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & \vdots & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & \vdots & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & \vdots & b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$i, j = 2, 3, \cdots, n$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{1j}^{(1)} \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \qquad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} b_1^{(1)}$$

در صورتی که $a_{11}^{(1)} = 0$، جای سطر اول را با سطر دیگری که عضو اول آن مخالف صفر باشد تعویض می‌کنیم

مرحله دو. حال با فرض $a_{22}^{(2)} \neq 0$ سطر دوم را در $l_{i2} = -\frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$ ضرب نموده و با سطر iام برای $i = 3, 4, \cdots, n$ جمع می‌کنیم.این عمل دستگاه معادل زیر را نتیجه می‌دهد :

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & \vdots & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & \vdots & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & \vdots & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & \vdots & b_n^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$i, j = ۳, ۴, \cdots, n$$

$$a_{ij}^{(۳)} = a_{ij}^{(۲)} - a_{۲j}^{(۲)} \frac{a_{i۲}^{(۲)}}{a_{۲۲}^{(۲)}}$$

$$b_i^{(۳)} = b_i^{(۲)} - \frac{a_{i۲}^{(۲)}}{a_{۲۲}^{(۲)}} b_۲^{(۲)}$$

مرحله تکرار. عملیات فوق را تا جایی که ماتریس ضرایب به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل شود، ادامه می‌دهیم.

تذکر. همانگونه که الگوریتم قبل نشان می‌دهد، برای انجام مرحله iام بایستی $a_{ii}^{(i)}$ مخالف صفر باشد. هرگاه عضو قطری (یا محوری) در مرحله‌ای صفر باشد، کافی است با تعویض دو سطر از ماتریس افزوده به یک عضو قطری غیر صفر در آن مرحله برسیم.

دستگاه معادلات زیر را به کمک روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} x_۱ + \frac{۱}{۲}x_۲ + \frac{۱}{۳}x_۳ = ۱ \\ \frac{۱}{۲}x_۱ + \frac{۱}{۳}x_۲ + \frac{۱}{۴}x_۳ = ۰ \\ \frac{۱}{۳}x_۱ + \frac{۱}{۴}x_۲ + \frac{۱}{۵}x_۳ = ۰ \end{cases}$$

حل: با قرار دادن $l_{۲۱} = -\frac{۱}{۲}$ و $l_{۳۱} = -\frac{۱}{۳}$، ضرب $l_{۲۱}$ در معادله اول و اضافه نمودن حاصل با معادله دوم و همچنین ضرب $l_{۳۱}$ در معادله اول و افزودن آن به معادله سوم خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x_۱ + \frac{۱}{۲}x_۲ + \frac{۱}{۳}x_۳ = ۱ \\ \frac{۱}{۱۲}x_۲ + \frac{۱}{۱۲}x_۳ = -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۱۲}x_۲ + \frac{۴}{۴۵}x_۳ = -\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

```
>> format rat
>> A=[1 1/2 1/3;1/2 1/3 1/4;1/3 1/4 1/5]
A =


     1          1/2          1/3
     1/2          1/3          1/4
     1/3          1/4          1/5


>> b=[1 0 0]'
b =


     1
     0
     0
>> [L U]=lu([A b])
L =
     1          0          0
     1/2          1          1
     1/3          1          0
U =
     1          1/2          1/3          1
     0          1/12          4/45          -1/3
     0          0          -1/180          -1/6
```

محورگیری

رابطه زیر را که مربوط به خطای حاصل ضرب دو عدد a و b می‌باشد، در نظر بگیرید :

$$e_{ab} \leq be_a + ae_b$$

هرگاه a و یا b اعدادی بزرگ باشند، خطای حاصل ضرب این دو عدد می‌تواند بزرگ باشد، حتی اگر e_a و e_b مقادیر کوچکی باشند.

اما هرگاه $|a|, |b| \leq ۱$ مقدار خطا در حد قابل قبول و نزدیک مقادیر e_a و e_b خواهد بود.

لذا بایستی حتی الامکان از اعداد تقریبی بزرگ (بزرگتر از یک) اجتناب کنیم.

جواب دستگاه زیر را به کمک روش حذفی گاوس و جایگذاری پسرو به دست آورید. محاسبات را با $4D$ انجام دهید.

$$\begin{cases} 10^{-5}x_1 + x_2 & = 1 \\ x_1 + x_2 & = 2 \end{cases}$$

حل: برای حذف x_1 از معادله دوم، بایستی معادله اول را در $l_{21} = -\frac{1}{10^{-5}}$ ضرب نموده با معادله دوم جمع کنیم، در این صورت چون $l_{21} = -10^5$، دستگاه بالا مثلثی حاصل عبارتست از:

$$\begin{cases} 10^{-5}x_1 + x_2 & = 1 \\ (1 - 10^5)x_2 & = 2 - 10^5 \end{cases}$$

در این صورت با $4D$ مقدار x_2 برابر است با :

$$x_2 = 1/0000$$

با قرار دادن مقدار $x_۲$ در معادله اول خواهیم داشت :

$$۱۰^{-۵} x_۱ = ۰ \Longrightarrow x_۱ = ۰$$

بنابراین جواب دستگاه بایستی به صورت $[۰, ۱]^t$ باشد.

در مثال قبل جای دو معادله را تعویض نموده و مجدداً جواب دستگاه را با $۴D$ به دست آورید.

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ = ۲ \\ ۱۰^{-۵}x_۱ + x_۲ = ۱ \end{cases}$$

با قرار دادن $l_{۲۱} = -۱۰^{-۵}$ و انجام عملیات لازم، دستگاه بالا مثلثی زیر را خواهیم داشت :

$$x_۱ + x_۲ = ۲$$

$$(۱ - ۱۰^{-۵})x_۲ = ۱ - ۲(۱۰^{-۵})$$

بنابراین با $۴D$ خواهیم داشت $x_۲ = ۱$ و از آن با قرار دادن در معادله اول خواهیم داشت :

$$x_۱ = ۱$$

لذا جواب معادله به صورت $[۱, ۱]^t$ می‌باشد.

تذکر.علت نادرست بودن جواب به دست آمده در مثال ۱ بزرگ بودن l_{21} نسبت به سایر ضرایب معادلات می‌باشد، در حالیکه در مثال ۲چون l_{21} مقداری کمتر از یک می‌باشد جواب دقیق مساله به دست آمده است.

همانگونه که مثالهای ۱ و ۲ نشان می‌دهند، برای صفر نمودن ضرایب x_j در سطرهای $j+1$ام تا nام بایستی l_{ij} را به صورت زیر محاسبه نماییم (بنا به الگوریتم روش حذفی گاوس)

$$l_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{jj}} \quad , \qquad i = j+1, \cdots, n$$

سپس با ضرب l_{ij} در سطر jام و جمع نمودن آن با سطر iام ضریب x_j در سطر iام صفر می‌شود.اما بنا به توضیحات بیان شده بایستی $|l_{ij}| \leq 1$ و یا بایستی داشته باشیم

$$|a_{jj}| \leq |a_{ij}|, \qquad i = j+1, \cdots, n$$

بنابراین هنگامی که بخواهیم ضریب x_j را در سطرهای ۱ + jام تا nام صفر کنیم، بایستی معادله‌ای را در سطر jام قرار دهیم که ضریب x_j نسبت به سایر معادلات بیشترین مقدار را از نظر قدر مطلق داشته باشد.

تعریف عمل فوق، یعنی انتقال معادله‌ای به سطر jام که ضریب x_j در آن بیشترین مقدار را از نظر قدر مطلق دارا می‌باشد، **محورگیری** می‌نامیم.

استفاده از وارون ماتریس A برای حل دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

چون فرض کرده‌ایم که در این دستگاهها ماتریس ضرایب نامنفرد است، لذا A^{-1} موجود است.

$$A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

نتیجه ۱. هرگاه بردار $\mathbf{b} = 0$ و $|A| \neq 0$، لذا A^{-1} موجود بوده و از آن بنا به رابطه (۹) جواب دستگاه $A\mathbf{x} = 0$ عبارتست از:

$$\mathbf{x} = A^{-1}0 \qquad \mathbf{x} = 0$$

نتیجه ۲. دستگاه $A\mathbf{x} = 0$ دارای جواب غیر صفر خواهد بود هرگاه A منفرد باشد، یعنی هرگاه $|A| = 0$.

تعریف دستگاهی که بردار سمت راست آن صفر باشد، یعنی دستگاه $A\mathbf{x} = 0$ دستگاه **همگن** نامیده می‌شود.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0/5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین جواب دستگاه عبارتست از : $\mathbf{x} = [-1,\ 0/5,\ 2]^t$

روشهای تکراری حل دستگاههای معادلات خطی

۱- روش ژاکوبی ۲- روش گاوس-سایدل

در این روشها، x_i را از حل معادله iام به دست می‌آوریم، بنابراین دستگاه $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ به صورت
زیر تبدیل می‌شود :

$$\begin{aligned} x_۱ &= \cdots \\ x_۲ &= \cdots \\ &\vdots \\ x_n &= \cdots \end{aligned}$$

فرض کنید دستگاهی از معادلات خطی شامل سه معادله و سه مجهول به شکل زیر داشته باشیم :

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3
\end{aligned}
$$

هرگاه $a_{11} \neq 0$ ، $a_{22} \neq 0$ و $a_{33} \neq 0$ در این صورت دستگاه را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1/a_{11}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) \\
x_2 &= 1/a_{22}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3) \\
x_3 &= 1/a_{33}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)
\end{aligned}
$$

یک تقریب اولیه از جواب به صورت $\mathbf{x}^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}]^t$ در نظر می‌گیریم.

روش ژاکوبی

با قرار دادن $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$ و $x_3^{(0)}$ در معادلات دستگاه یک تقریب جدید از جواب به صورت

زیر به دست می‌آید.تقریب جدید را با $\mathbf{x}^{(1)} = [x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}]^t$ نشان می‌دهیم.که

$$x_1^{(1)} = 1/a_{11}(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)})$$

$$x_2^{(1)} = 1/a_{22}(b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)})$$

$$x_3^{(1)} = 1/a_{33}(b_3 - a_{31}x_1^{(0)} - a_{32}x_2^{(0)})$$

این عمل یک تکرار را کامل می‌کند.

در حالت کلی با در دست داشتن تقریب $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}$ و $x_3^{(k)}$

جواب جدید $\mathbf{x}^{(k+1)} = [x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)}]^t$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= 1/a_{11}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} &= 1/a_{22}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} &= 1/a_{33}(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2 \cdots
\end{aligned}
$$

دستگاه دستگاه تکرار ژاکوبی برای به دست آوردن جواب دستگاه اولیه

با استفاده از روش تکراری ژاکوبی جواب دستگاه معادلات زیر را به دست آورید. جواب اولیه را بردار صفر در نظر بگیرید و محاسبات را با $4D$ انجام دهید.

$$4x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 9$$

$$-x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2$$

حل: با به دست آوردن x_1 از معادله اول، x_2 از معادله دوم و x_3 از معادله سوم خواهیم داشت :

$$x_1 = \frac{1}{4}(4 + x_2 - x_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{6}(9 - x_1 - 2x_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{5}(2 + x_1 + 2x_2)$$

لذا با قرار دادن $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$، دستگاه تکرار ژاکوبی به صورت زیر خواهد بود :

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}(4 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)})$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{6}(9 - x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)})$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}(2 + x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)})$$

برای $k = 0$ خواهیم داشت :

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(4 + x_2^{(0)} - x_3^{(0)}) = \frac{1}{4}(4 + 0 - 0) = 1$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1}{6}(9 - x_1^{(0)} - 2x_3^{(0)}) = \frac{1}{6}(9 - 0 - 0) = 1{,}5$$
$$x_3^{(1)} = \frac{1}{5}(2 + x_1^{(0)} + 2x_2^{(0)}) = \frac{1}{5}(2 + 0 + 0) = 0{,}4$$

حال برای $k = ۱$ تقریب بعدی جواب به صورت زیر خواهد بود :

$$x_1^{(۲)} = \frac{۱}{۴}(۴ + x_2^{(۱)} - x_3^{(۱)}) = \frac{۱}{۴}(۴ + ۱/۵ - ۰/۴) = ۱/۲۷۵۰$$

$$x_2^{(۲)} = \frac{۱}{۶}(۹ - x_1^{(۱)} - ۲x_3^{(۱)}) = \frac{۱}{۶}(۹ - ۱ - ۰/۸) = ۱/۲۰۰۰$$

$$x_3^{(۲)} = \frac{۱}{۵}(۲ + x_1^{(۱)} + ۲x_2^{(۱)}) = \frac{۱}{۵}(۲ + ۱ + ۳) = ۱/۲۰۰۰$$

جوابهای فوق و جوابهای بعدی در جدول زیر خلاصه شده‌اند :

شماره تکرار	x_1	x_2	x_3
۰	۰	۰	۰
۱	۱٫۰۰۰۰	۱٫۵۰۰۰	۰٫۴۰۰۰
۲	۱٫۲۷۵۰	۱٫۲۰۰۰	۱٫۲۰۰۰
۳	۱٫۰۰۰۰	۰٫۸۸۷۵	۱٫۱۳۵۰
۴	۰٫۹۳۸۱	۰٫۹۵۵۰	۱٫۰۵۴۰
۵	۰٫۹۷۵۳	۰٫۹۹۲۳	۱٫۰۰۹۲
۶	۰٫۹۹۵۸	۱٫۰۰۱۱	۰٫۹۹۲۰
۷	۱٫۰۰۲۳	۱٫۰۰۳۴	۰٫۹۹۹۶
۸	۱٫۰۰۱۰	۰٫۹۹۹۸	۱٫۰۰۱۸
۹	۰٫۹۹۹۵	۰٫۹۹۹۲	۱٫۰۰۰۹
۱۰	۰٫۹۹۹۶	۰٫۹۹۹۸	۰٫۹۹۹۶
۱۱	۱٫۰۰۰۱	۱٫۰۰۰۲	۰٫۹۹۹۸
۱۲	۱٫۰۰۰۱	۱٫۰۰۰۱	۱٫۰۰۰۱
۱۳	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۱
۱۴	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰

لذا جواب در تکرار چهاردهم به صورت

```
>> A=[4 -1 1;1 6 2;-1 -2 5];
>> b=[4 9 2]';
>> [L U]=lu([A b])
L =
    1.0000         0          0
    0.2500    1.0000          0
   -0.2500   -0.3600     1.0000

U =
    4.0000   -1.0000    1.0000    4.0000
         0    6.2500    1.7500    8.0000
         0         0    5.8800    5.8800
```

روش گاوس-سایدل

روش تکراری گاوس-سایدل همانند روش تکراری ژاکوبی است، با این تفاوت که از هر مقدار جدید به دست آمده از مولفه‌های جواب، در محاسبه سایر مولفه‌ها استفاده می‌کند.

پس از محاسبه $x_1^{(1)}$ از اولین معادله این دستگاه بر حسب بقیه x_iها، از این مقدار در محاسبه $x_2^{(1)}$ استفاده می‌کنیم، لذا $x_2^{(1)}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود :

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)})$$

حال با داشتن $x_1^{(1)}$ و $x_2^{(1)}$ مولفه $x_3^{(1)}$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)})$$

این عمل یک تکرار روش گاوس-سایدل را کامل می‌کند،

در حالت کلی با در دست داشتن $x_1^{(k)}$، $x_2^{(k)}$ و $x_3^{(k)}$ جواب بعدی را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)})$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)})$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}), k = 0, 1, 2, \cdots$$

دستگاه تکرار گاوس-سایدل

جواب دستگاه معادلات را با استفاده از روش تکراری گاوس-سایدل به دست آورید.محاسبات را با $4D$ انجام دهید و بردار اولیه را بردار صفر در نظر بگیرید.

$$4x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 9$$

$$-x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2$$

با قرار دادن $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ دستگاه تکرار گاوس-سایدل برای این مساله عبارتست از :

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}(4 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{6}(9 - x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}(2 + x_1^{(k+1)} + 2x_2^{(k+1)})$$

بنابراین برای $k = ۰$ خواهیم داشت :

$$x_۱^{(۱)} = \frac{۱}{۴}(۴ + ۰ + ۰) = ۱$$

$$x_۲^{(۱)} = \frac{۱}{۶}(۹ - ۱ - ۰) = \frac{۴}{۳}$$

$$x_۳^{(۱)} = \frac{۱}{۵}(۲ + ۱ + \frac{۸}{۳}) = \frac{۱۷}{۱۵}$$

شماره تکرار	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$
۰	۰	۰	۰
۱	۱٫۰۰۰۰	۱٫۳۳۳۳	۱٫۱۳۳۳
۲	۱٫۰۵۰۰	۰٫۹۴۷۳	۰٫۹۸۸۹
۳	۰٫۹۸۹۶	۱٫۰۰۵۰	۰٫۹۹۹۹
۴	۱٫۰۰۱۰	۰٫۹۹۹۹	۱٫۰۰۰۰
۵	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰

جواب در تکرار پنجم $x_۱ = x_۲ = x_۳ = ۱$

نکته: روش تکراری گاوس-سایدل سریعتر از روش ژاکوبی به جواب می‌رسد، البته هیچکدام از این دو روش، تضمین همگرایی ندارند

تذکر ۱. برای تشکیل دستگاههای تکراری ژاکوبی یا گاوس-سایدل بایستی در معادله iام داشته باشیم $a_{ii} \neq 0$ تا بتوانیم x_i را از آن معادله به دست آوریم، اما هرگاه $a_{ii} = 0$، چنین کاری امکانپذیر نیست، برای رفع این مشکل کافی است دو سطر را جابجا کنیم و معادله‌ای را در سطر iام قرار دهیم که $a_{ii} \neq 0$.

تذکر ۲. بنا به مطالب بیان شده در قسمت محورگیری بهتر است معادله‌ای را در سطر iام قرار دهیم که $|a_{ii}|$ درمیان سطرهای دیگر بیشترین مقدار را داشته باشد

تذکر ۳. حل یک دستگاه معادلات خطی با n معادله و n مجهول مشابه حالت سه متغیره است که بیان شد.مثلاً در روش گاوس-سایدل با فرض $a_{ii} \neq 0$ برای $i = 1, 2, \cdots, n$ تقریب $(k+1)$ام مولفه x_i به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}[b_i - a_{i1}x_1^{(k+1)} - a_{i2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{i,i-1}^{(k+1)} - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} - \cdots - a_{in}x_n^{(k)}], \; i = 1, 2, \cdots, n$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \qquad 1 \leq i \leq n$$

شرط توقف عملیات

عملیات محاسبه x_iها تاجایی انجام می‌شود که برای تمام iها $x_i^{(k+1)}$ و $x_i^{(k)}$ به اندازه کافی به هم نزدیک باشند، برای این منظور هر گاه قرار دهیم :

$$M^{(k)} = \max\{|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|, \quad i = 1, \cdots, n\}$$

و بخواهیم جواب دستگاه را با تقریب مقدار معلوم ϵ به دست آوریم، هرگاه شرط زیر برقرار شد عملیات را خاتمه می‌دهیم :

$$M^{(k)} < \epsilon$$

شرط نشان دهندهٔ این است که تمام مولفه‌های نظیر از جواب در دو تکرار متوالی به اندازه کافی به هم نزدیک می‌باشند.

به دست آوردن وارون یک ماتریس نامنفرد

برای به دست آوردن وارون ماتریس A، معمولاً اعمال سطری مقدماتی را به طور همزمان بر روی ماتریس A و ماتریس واحد انجام می‌دهیم.

لذا ماتریس افزوده $[A\vdots I]$ را در نظر گرفته و با انجام یک سلسله اعمال سطری مقدماتی آن را تبدیل به $[I\vdots B]$ می‌نماییم که در آن $B = A^{-1}$.

وارون ماتریس زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$[A \vdots I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۰ & ۲ & ۳ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۳ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۲ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

با تعویض سطر اول و دوم خواهیم داشت:

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

حال ۱– برابر سطر اول را با سطر سوم جمع نموده، در سطر سوم قرار می‌دهیم :

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1
\end{array}\right]
$$

سه برابر سطرِ سوم را با سطر اول جمع نموده در سطر اول قرار می‌دهیم :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

سطر دوم را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

سطر دوم را با سطر سوم جمع نموده، حاصل را در سطر سوم قرار می‌دهیم :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

(-۳) برابر سطر سوم را با سطر دوم جمع نموده، حاصل را در سطر دوم قرار می‌دهیم:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

حال سطر سوم را در ۲ ضرب می‌کنیم :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱ & ۳ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & -۲ & ۲ \end{array}\right]$$

لذا وارون ماتریس A عبارتست از :

$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۰ & -۲ & ۳ \\ -۱ & ۳ & -۳ \\ ۱ & -۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

تذکر.هرگاه ماتریس A وارون‌پذیر نباشد، تبدیل آن به ماتریس واحد امکانپذیر نیست.